UNIVERSITY OF HAWAII PERIODICAL
LIBRARY

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

NEUE FOLGE
DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK

HERAUSGEGEBEN VON

E. HLAWKA, N. HOFREITER UND J. RADON †
WIEN WIEN WIEN

SCHRIFTLEITUNG

N. HOFREITER
WIEN

60. BAND, 3. HEFT
MIT 5 TEXTABBILDUNGEN
AUSGEGEBEN IM SEPTEMBER 1956

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1956

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 300 bis 400 Seiten vereinigt werden. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien, IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden; alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5, Tel. U 26 5 60 Serie, Telegrammadresse: Springerbuch Wien.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel bei der Rücksendung der korrigierten Fahnen erfolgen.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben. Sie können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur mit Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie zehn Prozent der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Der Verlag

60. Band/3. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Parameswaran, S. Number of Recurring Cycles 183

Nef, W. Monotone Linearformen auf teilgeordneten Vektorräumen 190

Gigl, H. Über die Multiplizität eines isolierten Schnittpunktes von n Hyperflächen im R_n 198

Götz, H. Zur konformen Kurventheorie 205

Rembs, E. Bemerkung zu meiner Arbeit „Randvorgaben bei infinitesimaler Verbiegung konvexer Flächen" 212

Leicht, J. Über ZPE-Ringe in der algebraischen Geometrie 214

Hornich, H. Über Schwingungen mit periodischer Störung und Lösung . 223

Brauner, H. Konstruktive Durchführung der durch die Sehnen einer Raumkurve 3. Ordnung vermittelten Abbildung des Raumes auf eine Ebene . 231

Nöbauer, W. Eine Verallgemeinerung der eindimensionalen linearen Gruppe mod n 249

Buchbesprechungen 257

Die Redaktion und der Verlag geben in tiefer Trauer bekannt, daß

Herr Professor Dr. Johann Radon

Vorstand des Mathematischen Institutes der Wiener Universität, am 25. Mai 1956 im 69. Lebensjahr verschieden ist. Professor Radon kehrte 1947, nach einer Tätigkeit von 28 Jahren an deutschen Universitäten, an seine Heimatuniversität Wien zurück und erklärte sich sogleich bereit, als Herausgeber der damals wiederentstandenen Zeitschrift

„Monatshefte für Mathematik"

zu fungieren. Trotz seiner zahlreichen akademischen Würden nahm er sich die Zeit, alle eingelangten Manuskripte kritisch zu beurteilen. Ein ausführlicher Nachruf auf Professor Radon, in dem von Herrn Professor Dr. Paul Funk seine wissenschaftlichen Arbeiten gewürdigt werden, wird in dieser Zeitschrift erscheinen.

Digitized by the Internet Archive
in 2023 with funding from
Kahle/Austin Foundation

https://archive.org/details/monatshefte-fuer-mathematik_1956_60_3

Number of Recurring Cycles

By

S. Parameswaran, Trivandrum, S. India

(Received November 11, 1955)

A pure recurring decimal is generated by a proper fraction $\frac{M}{N}$ in which N is prime to 10. When N is an odd prime other than 5 and M takes on values $1, 2, 3, \ldots (N-1)$, $\frac{M}{N}$ will generate $(N-1)$ recurring Cycles of which some are distinct and some are not. Two Cycles are considered to be not distinct from each other if one can be got from the other by Cyclic permutations of digits. The number of distinct Cycles generated by $\frac{M}{N}$ when N is an odd prime other than 5, is given by $\frac{N-1}{\alpha}$, where α is the least index other than zero for which $10^{\alpha} \equiv 1 \pmod{N}$. The object of this paper is to find a formula for the number of distinct recurring Cycles generated by fractions of the type $\frac{M}{N}$, where N is a Composite number but prime to 10 and M takes on values $1, 2, \ldots, (N-1)$.

Throughout this paper N will denote a composite number $= p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots p_k^{\lambda_k}$, which is prime to 10; $(a, b) = c$ will mean a and b have the $(G \,.\, C \,.\, M)$ greatest Common Measure c and $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ will denote the $(L \,.\, C \,.\, M)$ least Common multiple of the numbers $a_1, a_2, \ldots, a_r$. The following results which we use are to be found in the references indicated.

I. If $0 < x < 1$ and $x = \frac{M}{N}$ where N is prime to 10 and M is prime to N and α is the order of 10 (mod N) then the decimal is pure recurring and has a period of α digits [1 . P 111].

II. If $\frac{M_1}{N} = 0 \,.\, \dot{x}_1 \, x_2 \ldots \dot{x}_\alpha$, the process of generating this decimal by successive divisions may be summarised by the equations

$$10\, M_r = x_r \,.\, N + M_{r+1}, \qquad r = 1, 2, \ldots, \alpha \tag{i}$$

where $M_{\alpha+1} = M_1$ and $0 < M_r < N$

$$M_{r+1} \equiv 10 \,.\, M_r \equiv 10^r \,.\, M_1 \pmod{N} \qquad r = 1, 2, \ldots, \alpha. \tag{ii}$$

The set $\{M_r\}$ will be called a linked set of remainders of N . A Cyclic permutation of the equations (i) may be used to bring any M_r into the leading position.

$$\frac{M_r}{N} = 0 \,.\, \dot{x}_r \, x_{r+1} \ldots x_\alpha \, x_1 \ldots \dot{x}_{r-1}.$$

The α repetends formed by these Cyclic permutations will be regarded as the same period and α is the length of the period. The fundamental property of the length of the period is: — α is the smallest value of x for which $10^x \equiv 1 \pmod{N}$

$$\therefore M_{\alpha+1} = M_1 \equiv 10^\alpha \, M_1 \pmod{N} \text{ from (ii).}$$

An immediate consequence is that α depends only on N. We may therefore say that "N has period of length α". The number of integers less than N and prime to N or the residues of N is denoted by $\Phi(N)$, Euler's function. Since the complete set of residues of N contain any linked set, $\alpha \leq \Phi(N)$. For prime N, $\Phi(N) = N-1$. α divides $\Phi(N)$ follows from Fermat's theorem [2].

III. If any integer M, prime to N, belongs to $\alpha \pmod{N}$ and if $M^\beta \equiv 1 \pmod{N}$, then α divides β [3. P 100].

Let α_r be the least index other than zero for which

$$10^{\alpha_r} \equiv 1 \pmod{p_r} \qquad r = 1, 2, \ldots, k$$

and $f_1, f_{1\,(2)}, f_{1\,(2\,3)} \ldots$ be defined by the following relations

$$10^{\alpha_1} - 1 = D_1 \, p_1^{f_1} \qquad (D_1, p_1) = 1$$

$$10^{\{\alpha_1, \alpha_2\}} - 1 = D_{12} \, p_1^{f_{1(2)}} \, p_2^{f_{2(1)}} \qquad (D_{12}, p_1 p_2) = 1$$

$$10^{\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}} - 1 = D_{123} \, p_1^{f_{1(2\,3)}} \, p_2^{f_{2(1\,3)}} \, p_3^{f_{3(1\,2)}} \qquad (D_{123}, p_1 p_2 p_3) = 1$$

and so on

Further let $\mu_r = \lambda_r - f_r$ if $\lambda_r > f_r$

$= 0$ if $\lambda_r \leq f_r$

and $\mu_{1(2\,3\,\ldots\,r)} = \lambda_1 - f_{1(2\,3\,\ldots\,r)}$ if $\lambda_1 > f_{1(2\,3\,\ldots\,r}$

$= 0$ if $\lambda_1 \leq f_{1(2\,3\,\ldots\,r)}$

then

Theorem I: — The number of digits in the Cycle of $\frac{M}{N}$, $(M,N)=1$

is $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} \cdot p_1^{\mu_{1(2\,3\ldots k)}} p_2^{\mu_{2(1\,3\ldots k)}} \ldots p_k^{\mu_{k(1,\,2\ldots\overline{k-1})}}$.

Proof: — $10^\beta \equiv 1 \pmod{p_1^{f_1(2\,3\ldots k)} p_2^{f_2(1\,3\ldots k)} \ldots p_k^{f_k(1\,2\ldots\overline{k-1})}}$

if $\beta = C \cdot \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$ by III.

Then $M.(10^\beta-1)=M([D_{12\ldots k}\, p_1^{f_1(2\,3\ldots k)} p_2^{f_2(1\,3\ldots k)} \ldots p_k^{f_k(1\,2\ldots k-1)}+1]^C-1)$

$\equiv 0 \pmod{N}$ if and only if C is a multiple of

$p_1^{\mu_{1(2\,3\ldots k)}} p_2^{\mu_{2(1\,3\ldots k)}} \ldots p_k^{\mu_{k(1\,2\ldots\overline{k-1})}}$ and the least value of C is the above expression itself.

[Assuming that c is prime to $p_1\, p_2 \ldots p_k$ or is a multiple of $p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \ldots$ $\ldots p_k^{\nu_k}$ where $\nu_r < \mu_{r(1\,2\ldots k)}$ and using the binomial expansion the result is contradicted. Hence the result]. Hence $\frac{M}{N}$ has $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} \cdot p_1^{\mu_{1(2\,3\ldots k)}} p_2^{\mu_{2(1\,3\ldots k)}} \ldots p_k^{\mu_{k(1\,2\ldots\overline{k-1})}}$ digits in its Cycle.

Theorem II. With the above notation and taking

$$R_1 = \mu_1 \cdot \Phi(p_1^{f_1}) + (p_1^{\lambda_1-\mu_1} - 1)$$

and

$$R_{1(2\,3\ldots)} = \mu_{1(2\,3\ldots)} \cdot \Phi(p_1^{f_{1(2\,3\ldots)}}) + (p^{\lambda_1-\mu_{1\,(2\,3\ldots)}} - 1)$$

the number of distinct Cycles generated by $\frac{M}{N}$ where $M = 1, 2, \ldots$ $\ldots(N-1)$ is given by the expression

$$\Sigma \frac{R_1}{\alpha_1} + \Sigma \frac{R_{1(2)} \cdot R_{2(1)}}{\{\alpha_1, \alpha_2\}} + \Sigma \frac{R_{1(2\,3)} R_{2(1\,3)} R_{3(1\,2)}}{\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}} + \text{— — — — — —}$$

$$+\Sigma \frac{R_{1(2\,3\ldots\overline{k-1})} R_{2(1\,3\ldots\overline{k-1})} \cdots R_{\overline{k-1}\,(1,\,2\ldots\overline{k-2})}}{\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\overline{k-1}}\}} + \frac{R_{1(2\,3\ldots k)} \cdots R_{k(1\,2\ldots\overline{k-1})}}{\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\, \alpha_k\}}$$

Proof: — By II it follows that $\frac{M}{N}$ for all values of M which are prime to N generate Cycles having the same length and that for any M_r prime to N there is a linked set of α remainders which produce non-distinct Cycles and α is a divisor of $\Phi(N)$.

Numbers 1 to $(N-1)$ can be divided into two sections.

A. all multiples of $p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_k^{r_k}$ where $r_s = 0$ or λ_s, $(s = 1, 2 \ldots k)$ (all r's simultaneonsly zero being excluded from this section).

B. all multiples of $p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_k^{r_k}$ where $r_s = 0, 1, 2, \ldots, (\lambda_s - 1)$, $(s = 1, 2, \ldots, k)$ $(r_s \neq \lambda_s)$.

(all r's simultaneously zero being included in this section).

Numbers in A can further be subdivided and the number of distinct Cycles that each subdivision gives can be calculated as follows: —

A. 1 all multiples of $p_2^{\lambda_2} p_3^{\lambda_3} \ldots p_k^{\lambda_k}$ will give $\frac{R_1}{\alpha_1}$ distinct cycles

(The number of distinct Cycles in this subdivision = number of distinct cycles in $\frac{M}{p_1^{\lambda_1}}$ where $1 \leq M < p_1^{\lambda_1} = \sum_{s=0}^{\lambda-1}$ [number of distinct Cycles in $\frac{M}{p_1^{\lambda_1}}$ where $(M, p_1^{\lambda_1}) = p_1^{s}$]

$$= \left[\frac{\Phi(p_1^{\lambda_1})}{p_1^{\mu_1} \cdot \alpha_1} + \frac{\Phi(p_1^{\lambda_1 - 1})}{p_1^{\mu_1 - 1} \cdot \alpha_1} + \ldots + \frac{\Phi(p_1^{f_1+1})}{p_1 \cdot \alpha_1} + \frac{\Phi(p_1^{f_1}) + \Phi(p_1^{f_1-1}) + \ldots + \Phi(p_1)}{\alpha_1}\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha_1} [\mu_1 \cdot \Phi(p_1^{f_1}) + (p_1^{f_1} - 1)] \text{ if } \mu_1 = \lambda_1 - f_1 > 0$$

and

$$= \frac{1}{\alpha_1} [\Phi(p_1^{\lambda_1}) + \Phi(p_1^{\lambda_1 - 1}) + \ldots + \Phi(p_1)] = \frac{1}{\alpha_1} [p_1^{\lambda_1} - 1] \text{ if } \lambda_1 \leq f_1.$$

The results in the two cases can be combined into the form $\frac{R_1}{\alpha_1}$ where $R_1 = [\mu_1 \Phi(p_1^{f_1}) + (p_1^{\lambda_1 - \mu_1} - 1)])$.

This and similar sets of numbers will give $\Sigma \frac{R_1}{\alpha_1}$ distinct Cycles.

A. 2. all multiples of $p_3^{\lambda_3} p_4^{\lambda_4} \ldots p_k^{\lambda_k}$ which are not multiples of $p_2^{\lambda_2}$ or $p_1^{\lambda_1}$ will give $\frac{R_{1(2)} \cdot R_{2(1)}}{\{\alpha_1, \alpha_2\}}$ distinct Cycles.

(Numbers belonging to this subdivision can further be grouped into four classes.

(1) all multiples of $p_1^{r_1}$ but not of $p_1^{r_1+1}$ which are prime to p_2

$r_1 = 1, 2, \ldots, (\lambda_1 - 1)$

(2) all multiples of $p_2^{r_2}$ but not of $p_2^{r_2+1}$ which are prime to p_1

$r_2 = 1, 2, \ldots, (\lambda_2 - 1)$

(3) all multiples of $p_1^{r_1} p_2^{r_2}$ where $1 \leq r_1 \leq (\lambda_1 - 1)$ and $1 \leq r_2 \leq (\lambda_2 - 1)$ and (4) all numbers which are prime to $p_1 p_2$.

Number of distinct Cycles given by numbers in (1)

$$= \frac{1}{\{\alpha_1, \alpha_2\}} \left[\frac{\Phi(p_1^{\lambda_1 - 1} p_2^{\lambda_2})}{p_1^{\mu_{1(2)} - 1} p_2^{\mu_{2(1)}}} + \frac{\Phi(p_1^{\lambda_1 - 2} p_2^{\lambda_2})}{p_1^{\mu_{1(2)} - 2} p_2^{\mu_{2(1)}}} + \ldots + \frac{\Phi(p_1^{f_{1(2)}} p_2^{\lambda_2})}{p_2^{\mu_{2(1)}}} \right.$$
$$\left. + \frac{\Phi(p_1^{f_{1(2)} - 1} p_2^{\lambda_2}) + \ldots + \Phi(p_1 p_2^{\lambda_2})}{p_2^{\mu_{2(1)}}} \right]$$

$$= \frac{1}{\{\alpha_1, \alpha_2\}} \Phi(p_2^{f_{2(1)}}) [\mu_{1(2)} \Phi(p_1^{f_{1(2)}}) + (p_1^{f_{1(2)} - 1} - 1)]$$

$$= \frac{1}{\{\alpha_1, \alpha_2\}} \Phi(p_2^{f_{2(1)}}) [R_{1(2)} - \Phi(p_1^{f_{1(2)}})].$$

Similarly the number of distinct Cycles given by numbers in (2)

$$= \frac{\Phi(p_1^{f_{1(2)}})}{\{\alpha_1, \alpha_2\}} [R_{2(1)} - \Phi(p_2^{f_{2(1)}})].$$

Number of distinct Cycles given by numbers in (3):

= Number of distinct Cycles given by numbers $p_1^{r_1} p_2^{r_2}$ where $r_1 = 1, 2, \ldots, \mu_{1(2)}$ + Number of distinct Cycles given by numbers $p_1^{r_1} p_2^{r_2}$ where $r_1 = \mu_{1(2)} + 1, \mu_{1(2)} + 2, \ldots, (\lambda_1 - 1)$ and $r_2 = 1, 2, \ldots, (\lambda_2 - 1)$ in both

$$= \frac{\mu_{1(2)} \Phi(p_1^{f_{1(2)}})}{\{\alpha_1, \alpha_2\}} [\mu_{2(1)} \Phi(p_2^{f_{2(1)}}) + (p_2^{f_{2(1)} - 1} - 1)] +$$
$$+ \sum_{s=1}^{f_{1(2)} - 1} \frac{\Phi(p_1^{f_{1(2)} - s})}{\{\alpha_1, \alpha_2\}} [\mu_{2(1)} \Phi(p_2^{f_{2(1)}}) + (p_2^{f_{2(1)} - 1} - 1)]$$

$$= \frac{1}{\{\alpha_1, \alpha_2\}} [\mu_{1(2)} \Phi(p_1^{f_{1(2)}}) + (p_1^{f_{1(2)} - 1} - 1)] \times [\mu_{2(1)} \Phi(p_2^{f_{2(1)}}) + (p_2^{f_{2(1)} - 1} - 1)]$$

$$= \frac{1}{\{\alpha_2, \alpha_2\}} [R_{1(2)} - \Phi(p_1^{f_{1(2)}})] \times [R_{2(1)} - \Phi(p_2^{f_{2(1)}})]$$

and the number of distinct Cycles given by numbers in (4)

$$= \frac{\Phi(p_1^{f_{1(2)}}) \cdot \Phi(p_2^{f_{2(1)}})}{\{\alpha_1, \alpha_2\}}.$$

Total number of distinct Cycles $= \frac{R_{1(2)} \cdot R_{2(1)}}{\{\alpha_1, \alpha_2\}}$)

This and similar sets of numbers will give $\Sigma \frac{R_{1(2)} \cdot R_{2(1)}}{\{\alpha_1, \alpha_2\}}$ distinct Cycles

— — — — — — — — — — — — — — — —
— — — — — — — — — — — — — — — —
— — — — — — — — — — — — — — — —

A. (k—1). all multiples of $p_k^{\lambda_k}$ which are not multiples of $p_1^{\lambda_1}, p_2^{\lambda_2}, \ldots$ $\ldots$ or $p_{k-1}^{\lambda_{k-1}}$ will give $\dfrac{R_{1(2\,3\ldots\overline{k-1})} \cdot R_{2(1\,3\ldots\overline{k-1})} \cdots R_{\overline{k-1}\,(1\,2\ldots\overline{k-2})}}{\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{\overline{k-1}}\}}$ Cycles

This and similar sets of numbers will give

$$\Sigma \frac{R_{1(2\,3\ldots k-1)} \cdot R_{2(1\,3\ldots\overline{k-1})} \cdots R_{\overline{k-1}\,(1\,2\ldots\overline{k-2})}}{\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\overline{k-1}}\}} \text{ distinct Cycles.}$$

Numbers in B can further be subdivided and the number of distinct Cycles that each subdivision gives can be calculated as follows: —

B. 1. Numbers which are prime to $p_1\, p_2 \ldots p_k$ will give:

$$\frac{\Phi(p_1^{\lambda_1}\, p_2^{\lambda_2} \ldots p_k^{\lambda_k})}{\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}\, p_1^{\mu_{1(2\ldots k)}} \ldots p_k^{\mu_{k(1\,2\ldots\overline{k-1})}}} = \frac{\Phi(p_1^{f_{1(2\,3\ldots k)}}) \ldots \Phi(p_k^{f_{k(1\,2\ldots\overline{k-1})}})}{\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}}$$

Cycles.

B. 2. Numbers prime to $p_1\, p_2 \ldots p_{k-1}$ but which are multiples of $p_k^{r_k}$ where $r_k = 1, 2, \ldots, (\lambda_k - 1)$ will give

$$\frac{\Phi(p_1^{f_{1(2\,3\ldots k)}}) \cdot \Phi(p_2^{f_{2(1\,3\ldots k)}}) \ldots \Phi(p_{k-1}^{f_{k-1\,(1\,2\ldots\overline{k-2}\,k)}})}{\{\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k\}} [R_{k(1\,2\ldots\overline{k-1})} -$$

$$- \Phi(p_k^{f_{k(1\,2\ldots\overline{k-1})}})] =$$

$$= \frac{\Phi(p_1^{f_{1(2\,3\ldots k)}}) \ldots \Phi(p_k^{f_{k(1\,2\ldots\overline{k-1})}})}{\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}} \left[\frac{R_{k(1\,2\ldots\overline{k-1})}}{\Phi(p_k^{f_{k(1\,2\ldots\overline{k-1})}})} - 1\right]$$

distinct Cycles.

B. 3. Numbers prime to $p_1\, p_2 \ldots p_{k-2}$ but which are multiples of $p_{k-1}^{r_{k-1}} \cdot p_k^{r_k}$, $1 \leq r_{k-1} \leq (\lambda_{k-1} - 1)$ and $1 \leq r_k \leq (\lambda_k - 1)$ will give

$$\frac{\prod_{r=1}^{k} \Phi(p_r^{f_{r(1\,2\ldots\overline{r-1}\,\overline{r+1}\ldots k)})}{\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}} \left[\frac{R_{\overline{k-1}\,(1\,2\ldots\overline{k-2}\,k)}}{\Phi(p_{k-1}^{f_{k-1\,(1\,2\ldots\overline{k-2}\,k)}})} - 1\right] \cdot \left[\frac{R_{k(1\,2\ldots\overline{k-1})}}{\Phi(p_k^{f_{k(1\,2\ldots\overline{k-1})}})} - 1\right]$$

distinct Cycles

— — — — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — — — —

B. k. Numbers prime to p_1 but which are multiples of $p_2^{r_2}\, p_3^{r_3} \ldots p_k^{r_k}$ $1 \leq r_s \leq (\lambda_s - 1)$, $(s = 2, 3, \ldots, k)$ will give

$$\frac{\prod_{r=1}^{k} \Phi(p_r^{f_{r(1\,2\ldots\overline{r-1}\,\overline{r+1}\ldots k)})}{\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}} \left[\frac{R_{2(1\,3\ldots k)}}{\Phi(p_2^{f_{2(1\,3\ldots k)}})} - 1\right] \times \ldots \times \left[\frac{R_{k(1\,2\ldots\overline{k-1})}}{\Phi(p_k^{f_{k(1\,2\ldots\overline{k-1})}})} - 1\right]$$

distinct Cycles.

B. $\overline{k+1}$. Numbers of the type $p_1^{r_1}\, p_2^{r_2} \ldots p_k^{r_k}$ where $1 \leq r_s \leq (\lambda_s - 1)$ $(s = 1, 2, \ldots, k)$ will give

$$\frac{\prod_{r=1}^{k} \Phi(p_r^{f_r(1\,2\ldots\overline{r-1}\,\overline{r+1}\ldots k)})}{\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}} \prod_{s=1}^{k} \left[\frac{R_{s(1\,2\ldots\overline{s-1}\,\overline{s+1}\ldots k)}}{\Phi(p_s^{f_{s(1\,2\ldots\overline{s-1}\,\overline{s+1}\ldots k)}})} - 1 \right] \text{distinct Cycles.}$$

Thus the number of distinct Cycles given by numbers in B_1, $B\,\overline{k+1}$ and numbers in and similar to those in $B_2, B_3, \ldots, B_k$

$$= \frac{\prod_{r=1}^{k} \Phi(p_r^{f_r(1\,2\ldots\overline{r-1}\,\overline{r+1}\ldots k)})}{\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}} \left(1 + \Sigma \left[\frac{R_{1(2\,3\ldots k)}}{\Phi(p_1^{f_{1(2\,3\ldots k)}})} - 1 \right] \right.$$

$$+ \Sigma \left[\frac{R_{1(2\,3\ldots k)}}{\Phi(p_1^{f_{1(2\,3\ldots k)}})} - 1 \right] \cdot \left[\frac{R_{2(1\,3\ldots k)}}{\Phi(p_2^{f_{2(1\,3\ldots k)}})} - 1 \right] + - - - - - - - -$$

$$+ \Sigma \left[\frac{R_{1(2\,3\ldots k)}}{\Phi(p_1^{f_{1(2\,3\ldots k)}})} - 1 \right] \cdot \left[\frac{R_{2(1\,3\ldots k)}}{\Phi(p_2^{f_{2(1\,3\ldots k)}})} - 1 \right] \ldots \left[\frac{R_{\overline{k-1}\,(1\,2\ldots\overline{k-2}\,k)}}{\Phi(p_{k-1}^{f_{k-1(1\,2\ldots\overline{k-2}\,k)}})} - 1 \right]$$

$$\left. + \left[\frac{R_{1(2\,3\ldots k)}}{\Phi(p_1^{f_{1(2\,3\ldots k)}})} - 1 \right] \cdot \left[\frac{R_{2(1\,3\ldots k)}}{\Phi(p_2^{f_{2(1\,3\ldots k)}})} - 1 \right] \ldots \left[\frac{R_{k(1\,2\ldots\overline{k-1})}}{\Phi(p_k^{f_{k(1\,2\ldots\overline{k-1})}})} - 1 \right] \right)$$

$$= \frac{R_{1(2\,3\ldots k)} \cdot R_{2(1\,3\ldots k)} \cdots R_{k(1\,2\ldots\overline{k-1})}}{\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}}$$

Total number of distinct Cycles = Number of distinct Cycles given by numbers in A + Number of distinct Cycles given by numbers in B

$$= \Sigma \frac{R_1}{\alpha_1} + \Sigma \frac{R_{1(2)} R_{2(1)}}{\{\alpha_1, \alpha_2\}} + \Sigma \frac{R_{1(2\,3)} R_{2(1\,3)} R_{3(1\,2)}}{\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}} + - - - - - -$$

$$+ \Sigma \frac{R_{1(2\,3\ldots\overline{k-1})} \cdot R_{2(1\,3\ldots\overline{k-1})} \cdots R_{\overline{k-1}\,(1\,2\ldots\overline{k-2})}}{\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\overline{k-1}}\}} +$$

$$\frac{R_{1(2\,3\ldots k)} \cdot R_{2(1\,3\ldots k)} \cdots R_{k(1\,2\ldots\overline{k-1})}}{\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}}$$

1. *G. H. Hardy and E. M. Wright*: An Indroduction to the theory of Numbers (Second Edition).

2. *J. S. Batty*: "Some properties of pure Recurring decimals" (The Mathematical Gazette **38**. (1954). Pp. 90—95).

3. *H. Griffin:* Elementary theory of Numbers (1954) McGraw. Hill.

Monotone Linearformen auf teilgeordneten Vektorräumen

Von

Walter Nef, Bern

(Eingelangt am 9. Dezember 1955)

Monotone Linearformen auf teilgeordneten Vektorräumen sind für verschiedene Gebiete der Mathematik, vor allem für die Integrationstheorie, von Interesse. So ist, abgesehen von klassischen Integraltypen, in der axiomatischen Integrationstheorie von *H. Hadwiger*[1] ein Integral definiert als monotone, invariante und normierte (reellwertige) Linearform auf einem sogenannten Integralfeld, d. h. auf einem invarianten und linearen Funktionenraum $\mathfrak{M}$. (Dabei bezieht sich die Invarianz auf eine Gruppe von Transformationen des Definitionsbereichs der Funktionen von $\mathfrak{M}$.)

Mit Rücksicht auf die weitere Entwicklung der genannten axiomatischen Integrationstheorie sowie auf weitere Anwendungen erschien es wünschenswert, einige Sätze über invariante reellwertige Linearformen auf Vektorräumen, auf denen eine Gruppe linearer Transformationen wirkt, zusammenzustellen. Dies geschieht in einer besonderen Arbeit[2], in welcher der Fall eine wichtige Rolle spielt, wo der Vektorraum mit einer Teilordnung versehen ist und von den betrachteten Linearformen verlangt wird, daß sie monoton sind. Es wird dort gezeigt, daß die invarianten monotonen Linearformen auf einem Vektorraum $\mathfrak{M}$ umkehrbar eindeutig den monotonen Linearformen auf einem geeigneten Quotientenraum von $\mathfrak{M}$ entsprechen. Alle Fragen, welche invariante monotone Linearformen betreffen, lassen sich deshalb auf solche über monotone Formen zurückführen. Da diese letzteren ein selbständiges Interesse beanspruchen können, sollen sie in der vorliegenden Arbeit

---

[1] Vgl. [2]—[6]. Außerdem sei darauf hingewiesen, daß Herr Hadwiger im Sommersemester 1951 an der Universität Bern ein Kolloquium über axiomatische Integrationstheorie leitete.

[2] [7] des Literaturverzeichnisses.

für sich allein betrachtet und die Resultate in [7] einfach übernommen werden.

Sei also M ein *teilgeordneter Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen*, d. h. ein Vektorraum, auf dem eine Relation $x \geq y$ definiert ist, die folgende Eigenschaften hat:

1. Sie ist reflexiv: $x \geq x$ für alle $x \in M$.
2. Sie ist transitiv: Aus $x \geq y$ und $y \geq z$ folgt $x \geq z$.
3. Aus $x \geq y$ und $y \geq x$ folgt $x = y$.
4. Aus $x \geq y$ folgt $x + z \geq y + z$ für alle $z \in M$.
5. Aus $x \geq 0$ folgt $\alpha\, x \geq 0$ für jede reelle Zahl $\alpha \geq 0$.

Wenn in dieser Arbeit von einer Teilordnung auf einem Vektorraum die Rede ist, so ist immer eine solche gemeint, welche die Eigenschaften 1.—5. hat, durch die also der Vektorraum ein teilgeordneter Vektorraum wird.

Die Teilordnung eines teilgeordneten Vektorraumes ist durch die Menge P der Elemente, die ≥ 0 sind, eindeutig bestimmt. P ist ein konvexer Kegel, d. h. aus $x_1, x_2 \in P$ folgt $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in P$, sofern die reellen Zahlen λ_1 und $\lambda_2 \geq 0$ sind. Außerdem enthält P mit x niemals auch $-x$, außer für $x = 0$. Einen konvexen Kegel mit dieser letzteren Eigenschaft nennen wir *Ordnungskegel*. Es gilt dann umgekehrt:

Ist P ein Ordnungskegel in M, so wird M durch die Relation „$x \geq y$, wenn $x - y \in P$ ist" ein teilgeordneter Vektorraum.

Ist $x_0 \in M$, so nennen wir den teilgeordneten Vektorraum M x_0-beschränkt[3], wenn zu jedem $x \in M$ eine positive reelle Zahl τ existiert, so daß

$$-\tau\, x_0 \leq x \leq +\tau\, x_0 \tag{1}$$

ist (woraus offensichtlich $x_0 \geq 0$ folgt).

Es ist für das Folgende wichtig, die x_0-Beschränktheit von M als geometrische Eigenschaft des zu M gehörigen Ordnungskegels P auszudrücken. Dazu sprechen wir vorerst aus:

Definition 1: *Eine konvexe Menge $K \subset M$ heißt*

— *vollständig, wenn zu jedem $x \in M$ eine positive reelle Zahl ε gehört, so daß $\varepsilon\, x \in K$ ist,*

— *beschränkt, wenn zu jedem von 0 verschiedenen Element $x \in M$ eine reelle Zahl $\lambda_0 > 0$ gehört, so daß für $\lambda \geq \lambda_0$ $\lambda\, x \notin K$ ist.*

Man sieht sofort ein, daß jede vollständige konvexe Menge das Nullelement von M enthält.

[3] Der Begriff der x_0-Beschränktheit wurde für Integralfelder von H. Hadwiger eingeführt. Vgl. [2], S. 57f. und [3], S. 350.

Satz 1: *Der teilgeordnete Vektorraum M ist dann und nur dann x_0-beschränkt, wenn in M eine vollständige, beschränkte und konvexe Menge K existiert, so daß $x_0 + K \subset P$ ist.*[4]

Beweis: 1. *Die Bedingung ist notwendig.* Sei nämlich M x_0-beschränkt und $\{e_i\}$ $(i \in J)$ eine Basis von M. Aus (1) folgt, daß jedem Basiselement e_i eine positive Zahl ε_i zugeordnet werden kann, so daß $x_0 - \varepsilon_i e_i \in P$ und $x_0 + \varepsilon_i e_i \in P$ ist. Die konvexe Hülle K der Menge aller Elemente $\pm \varepsilon_i e_i$ $(i \in J)$ ist offenbar vollständig und beschränkt und es ist $x_0 + K \subset P$.

2. *Die Bedingung ist hinreichend.* Sei nämlich K eine vollständige konvexe Menge, für die $x_0 + K \subset P$ ist, und x ein beliebiges Element von M. Es existiert eine positive Zahl ε, so daß $\varepsilon x \in K$ und $-\varepsilon x \in K$ ist. Also folgt $x_0 \pm \varepsilon x \in P$, d. h. $-\frac{1}{\varepsilon} x_0 \leq x \leq +\frac{1}{\varepsilon} x_0$, d. h. M ist x_0-beschränkt.

Unter einer *monotonen Linearform* auf einem teilgeordneten Vektorraum verstehen wir eine reellwertige Linearform F, für die aus $x \geq 0$ folgt $F(x) \geq 0$. Natürlich ist auf jedem teilgeordneten Vektorraum die Nullform ($F(x) = 0$ für alle $x \in M$) monoton. Es gibt nun Fälle, wo sie auch die einzige monotone Linearform ist, wie das folgende Beispiel zeigt:

Es sei M ein Vektorraum mit der abzählbar unendlichen Basis $e_1, e_2, e_3, \ldots$ Setzen wir $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots \geq 0$, dann und nur dann, wenn entweder $x = 0$ oder der letzte von Null verschiedene Koeffizient $\alpha_n > 0$ ist, so wird hierdurch, wie man leicht sieht, M ein teilgeordneter Vektorraum. Dieser hat die Eigenschaft, daß zu jedem $x \in M$ ein $y \in M$ existiert, so daß für jedes reelle λ $y \geq \lambda x$ ist. (Man braucht nur, wenn etwa $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ ist, $y = e_{n+1}$ zu setzen.) Ist nun F eine monotone Linearform auf M, so folgt $F(y) \geq \lambda F(x)$ für alle reellen λ und, da x ein beliebiges Element von M war, $F = 0$.

Durch dieses Beispiel wird die *Frage nach den Bedingungen dafür aufgeworfen, daß auf einem teilgeordneten Vektorraum M überhaupt eine von der Nullform verschiedene monotone Linearform existiert.* Sie ist in Hauptsatz 6 beantwortet. Offenbar gibt es dann und nur dann eine solche

[4] Wenn $x \in M$ und $A \subset M$ ist, so bezeichnen wir wie üblich mit $x + A$ die Menge aller Elemente $x + a$, wo $a \in A$ ist. Sind allgemeiner A und B zwei Untermengen von M und λ, μ zwei reelle Zahlen, so bedeutet $\lambda A + \mu B$ die Menge aller Elemente $\lambda a + \mu b$, wo $a \in A$ und $a \in B$ ist.

Linearform, wenn auf einem 1-dimensionalen Unterraum von M eine von der Nullform verschiedene Linearform existiert, die so beschaffen ist, daß sie zu einer monotonen Linearform auf M fortgesetzt werden kann. Somit wird die soeben erwähnte Frage gleichzeitig mit der folgenden allgemeineren beantwortet sein: *Auf einem Unterraum $L \subset M$ sei eine Linearform F_0 gegeben. Welches sind die Bedingungen dafür, daß F_0 zu einer monotonen Linearform auf M fortgesetzt werden kann?* (Vgl. Hauptsatz 5.)

Im Hinblick auf diese Fragestellung bedeutet im Folgenden L einen ein für allemal festgelegten Unterraum des teilgeordneten Vektorraumes M. L ist demnach (mit der von M her induzierten Teilordnung) selber ein teilgeordneter Vektorraum. Mit F_0 sei eine ebenfalls ein für allemal gegebene Linearform auf L bezeichnet. Wenn nun F_0 zu einer monotonen Linearform F auf M fortgesetzt werden kann, so ist sicher für jedes $y \in M$ die Menge reeller Zahlen $F_0(L \cap (y + P))$[5] nach unten beschränkt oder leer. Denn $x \in (L \cap (y + P))$ bedeutet $x \in L$ und $x \geq y$, d. h. $F_0(x) = F(x) \geq F(y)$. Zur Linearform F auf M existiert sodann eine vollständige, beschränkte und konvexe Menge $K_0 \subset M$, auf der F beschränkt ist (man wähle eine Basis $\{e_i\}$ $(i \in J)$ von M so, daß $|F(e_i)| \leq 1$ $(i \in J)$ ist; dann kann für K_0 die konvexe Hülle der Menge aller Elemente $\pm e_i$ $(i \in J)$ verwendet werden). Dann ist aber auch $F_0(L \cap (y + K_0 + P))$ für jedes $y \in M$ nach unten beschränkt. Dies führt uns zur

Definition 2: *Die auf dem Unterraum $L \subset M$ definierte Linearform F_0 heißt M-monoton, wenn in M eine vollständige, beschränkte und konvexe Menge K_0 existiert, so daß für jedes $y \in M$ die Menge reeller Zahlen $F_0(L \cap (y + K_0 + P))$ nach unten beschränkt ist.*

Hauptsatz 5 wird zum Ausdruck bringen, daß die M-Monotonie von F_0 für die Fortsetzbarkeit zu einer monotonen Linearform auf M nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist.

Ist F_0 eine M-monotone Linearform auf L, so gehört also zu jedem $y \in M$ eine reelle Zahl $\varrho(y)$, so daß aus $x \in L \cap (y + K_0 + P))$ folgt $F_0(x) \geq \varrho(y)$. Ist nun $x' \in L \cap (y - K_0 - P))$, so ist $-x' \in L \cap (-y + K_0 + P))$, also ist $-F_0(x') \geq \varrho(-y)$, d. h. $F_0(+x') \leq -\varrho(-y)$. *Die M-Monotonie von F_0 kann also auch dadurch charakterisiert werden, daß K_0 existiert, so daß für jedes $y \in M$ die Menge reeller Zahlen $F_0(L \cap (y - K_0 - P))$ nach oben beschränkt ist.*

Satz 2: *Jede auf M definierte monotone Linearform ist M-monoton.*

[5] $F_0(A)$ $(A \subset M)$ bedeutet die Bildmenge von A bei der Abbildung F_0 und ist also eine Menge reeller Zahlen.

Beweis: Wie schon bei der Überlegung vor Definition 2 festgestellt wurde, existiert zu jeder auf M definierten Linearform eine vollständige, beschränkte und konvexe Menge K_0, auf der die Linearform beschränkt ist. Daraus und aus der vorausgesetzten Monotonie folgt die Behauptung unmittelbar.

Satz 3: *F_0 sei eine auf dem Unterraum $L \subset M$ definierte M-monotone Linearform und K_0 eine gemäß Definition 2 zu F_0 gehörige vollständige, beschränkte und konvexe Menge. Dann gehört zu jeder reellen Zahl $\eta > 0$ ein reelles $\varepsilon > 0$, so daß aus $x \in L \cap (\varepsilon K_0 + P)$ folgt, daß $F_0(x) \geq -\eta$ ist.*

Beweis: $x \in L \cap (\varepsilon K_0 + P)$ bedeutet: $\frac{1}{\varepsilon} x \in L \cap (0 + K_0 + P)$, d. h. $\frac{1}{\varepsilon} F_0(x) \geq \varrho(0)$. Daraus folgt die Behauptung.

Korollar: *Jede M-monotone Linearform auf L ist monoton.*

Beweis: $x \geq 0 (x \in L)$ bedeutet, daß $x \in L \cap P$, d.h. $x \in L \cap (\varepsilon K_0 + P)$ ist für jedes $\varepsilon > 0$ (denn K_0 enthält das Nullelement von M, so daß $\varepsilon K_0 + P \supset P$ ist).

Neben der zum vornherein gegebenen Teilordnung P[6] auf M werden wir im folgenden noch weitere zu betrachten haben, durch die M ebenfalls ein teilgeordneter Vektorraum wird. Eine solche Teilordnung P^* nennen wir schwächer als die gegebene, wenn ihr Ordnungskegel $P^* \supset P$ ist (d. h. aus $x \geq y$ folgt $x \overset{*}{\geq} y$, wenn die neue Ordnungsrelation mit $\overset{*}{\geq}$ bezeichnet wird).

Definition 3: *Eine Teilordnung P^* auf M heißt L-beschränkt, wenn ein Element $x_0 \in L$ existiert, so daß M (mit der Teilordnung P^*) x_0-beschränkt ist*[7].

Nach Satz 1 ist also eine Teilordnung P^* *genau dann L-monoton, wenn ein Element $x_0 \in L$ und eine vollständige, beschränkte und konvexe Menge $K \subset M$ existieren, so daß $x_0 + K \subset P^*$ ist.*

Satz 4: *Sei F_0 eine auf dem Unterraum $L \subset M$ definierte, von der Nullform verschiedene und (in bezug auf die gegebene Teilordnung P auf M) M-monotone Linearform. Dann existiert auf M eine L-beschränkte Teilordnung P^*, die schwächer als P ist, und in bezug auf die F_0 monoton ist.*

Beweis: K_0 sei eine gemäß Definition 2 zu der M-monotonen Linearform F_0 gehörige vollständige, beschränkte und konvexe Menge, die auf Grund von Satz 3 so gewählt ist, daß

---

[6] Der Einfachheit wegen bezeichnen wir im folgenden eine Teilordnung mit demselben Buchstaben wie ihren Ordnungskegel.

[7] Vgl. [3].

$$F_0(x) \geq -\tfrac{1}{2} \text{ ist für } x \in L \cap (K_0 + P). \tag{2}$$

x_0 sei ein so gewähltes Element von L, daß $F_0(x_0) = 1$ ist.

Mit P^* bezeichnen wir den kleinsten konvexen Kegel, der die Mengen $x_0 + K_0$ und P enthält, also

$$P^* = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda(x_0 + K_0) + P. \tag{3}$$

Es gilt dann:

1. P^* ist Ordnungskegel einer Teilordnung auf M, durch die M ein teilgeordneter Vektorraum wird. Dazu ist nur noch zu beweisen, daß aus $x \in P^*$ und $-x \in P^*$ folgt, daß $x = 0$ ist.

$x \in P^*$ bedeutet $x = \lambda_1 x_0 + \lambda_1 k_1 + p_1$, wo $\lambda_1 \geq 0, k_1 \in K_0, p_1 \in P$ ist.
$-x \in P^*$ bedeutet $-x = \lambda_2 x_0 + \lambda_2 k_2 + p_2$, wo $\lambda_2 \geq 0, k_2 \in K_0, p_2 \in P$ ist.

Daraus folgt

$$0 = (\lambda_1 + \lambda_2)(x_0 + k) + (p_1 + p_2), \text{ wo } k \in K_0 \text{ ist.}$$

Wäre nun $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$, so würde weiter folgen: $-x_0 \in L \cap (K_0 + P)$, was wegen (2) und $F_0(-x_0) = -1$ nicht möglich ist. Also ist $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ d. h. $x \in P$ und $-x \in P$, also $x = 0$.

2. Da $0 \in \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda(x_0 + K_0)$ ist, ist nach (3) $P^* \supset P$, d. h. die Teilordnung P^* ist schwächer als P.

3. Nach der Bemerkung nach Definition 3 ist die Teilordnung P^* L-beschränkt, da nach (3) $x_0 + K_0 \subset P^*$ ist.

4. F_0 ist monoton bezüglich der Teilordnung P^*. Denn aus $x \in L \cap P^*$ folgt, daß

— entweder $x \in L \cap P$ ist, also (nach dem Korollar zu Satz 3) $F_0(x) \geq 0$

— oder es existiert eine reelle Zahl $\lambda > 0$, so daß

$$x \in L \cap (\lambda(x_0 + K_0) + P) = \lambda(x_0 + (L \cap (K_0 + P)))$$

ist. Daraus folgt aber mit Hilfe von $F_0(x_0) = 1$ und von (2) wieder, daß $F_0(x) > 0$ ist.

Damit ist Satz 4 vollständig bewiesen.

Hauptsatz 5: *Eine auf dem Unterraum $L \subset M$ definierte, von der Nullform verschiedene Linearform F_0 kann dann und nur dann zu einer monotonen Linearform auf M fortgesetzt werden, wenn sie M-monoton ist.*

Beweis: 1. Die *Notwendigkeit* der Bedingung geht aus den Überlegungen vor Definition 2 hervor.

2. *Die Bedingung ist hinreichend.* Ist sie nämlich erfüllt, so gibt es auf M eine L-beschränkte Teilordnung P^*, in bezug auf welche F_0 monoton ist, und die schwächer als P ist (Satz 4). Nach einem von

Kirsch bewiesenen Satz kann F_0 zu einer Linearform F auf M fortgesetzt werden, die bezüglich der Teilordnung P^* monoton ist[8]. Da P^* schwächer als P ist, ist F auch in bezug auf P monoton.

Wir wenden uns nun der Frage nach den Bedingungen zu, unter denen auf einem teilgeordneten Vektorraum M eine von der Nullform verschiedene monotone Linearform existiert. Die maßgebende Eigenschaft von M beruht auf

Definition 4: *Ein Unterraum $L \subset M$ heißt majorisiert, wenn zu jeder vollständigen, beschränkten und konvexen Menge $K \subset M$ ein Element $y \in M$ existiert, so daß $L \subset y - K - P$ ist.*

Hauptsatz 6: *Dann und nur dann existiert auf dem teilgeordneten Vektorraum M eine von der Nullform verschiedene monotone Linearform, wenn nicht jeder 1-dimensionale Unterraum von M majorisiert ist.*

Beweis: 1. *Die Bedingung ist notwendig.* Dazu genügt es zu zeigen, daß jede auf M definierte monotone Linearform auf jedem majorisierten 1-dimensionalen Unterraum identisch verschwindet.

Da eine auf M monotone Linearform F nach Satz 2 M-monoton ist, existiert nach Satz 4 eine M-beschränkte Teilordnung P^*, die schwächer als P ist und in bezug auf die F noch monoton ist. Aus (3) folgt ferner, daß $P^* \supset x_0 + K_0 + P$ ist für eine bestimmte vollständige, beschränkte und konvexe Menge $K_0 \subset M$ und ein bestimmtes Element $x_0 \in M$.

Ist nun der von einem Element $x \neq 0$ erzeugte 1-dimensionale Unterraum von M majorisiert, so existiert $y \in M$, so daß für jedes reelle τ

$$\tau x \in y - x_0 - K_0 - P \subset y - P^*$$

ist. Also ist $\tau F(x) \leq F(y)$ für alle reellen τ, d. h. $F(x) = 0$.

2. *Die Bedingung ist hinreichend.* Hier genügt es nach Hauptsatz 5 zu zeigen, daß auf jedem nicht majorisierten 1-dimensionalen Unterraum von M eine von der Nullform verschiedene M-monotone Linearform existiert. Oder: Existiert auf einem 1-dimensionalen Unterraum $L \subset M$ keine von der Nullform verschiedene M-monotone Linearform, so ist L majorisiert.

Sei also auf dem von einem Element $x \neq 0$ erzeugten 1-dimensionalen Unterraum L von den beiden Linearformen $F^{\pm}(\tau x) = \pm \tau$ keine M-monoton. Das bedeutet, daß zu jeder vollständigen, beschränkten

[8] [3], § 5. Der Beweis von Kirsch geht auf Überlegungen von Banach zurück (vgl. [1], S. 27ff.).

und konvexen Menge K ein Element $y \in M$ existiert, so daß $L \subset y - K - P$ ist, d. h. daß L majorisiert ist.

Die letzte Frage, die wir beantworten wollen, ist die nach der *Normierung*. Sei e ein bestimmtes Element von M. Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit auf M eine monotone Linearform F existiert, für die $F(e) = 1$ ist? Die Antwort folgt unmittelbar aus dem Beweis zum letzten Satz und ist enthalten in

Satz 7: *Dann und nur dann existiert zu einem von* 0 *verschiedenen Element* $e \in M$ *eine monotone Linearform* F *auf* M, *für die* $F(e) = 1$ *ist, wenn der von* e *erzeugte* 1*-dimensionale Unterraum nicht majorisiert und nicht* $e < 0$ *ist.*

Literatur

Eingeklammerte [ ] Zahlen im Text beziehen sich auf die entsprechende Nummer des Literaturverzeichnisses.

[1] *Stefan Banach*, Théorie des opérations linéaires, Warschau 1932. Neuausgabe durch Hafner Publishing Company, New York.

[2] *H. Hadwiger* und *A. Kirsch*, Zerlegungsinvarianz des Integrals und absolute Integrierbarkeit, Portugaliae Mathematica, vol. 11 (1952), S. 57—67.

[3] *A. Kirsch*, Über Zerlegungsgleichheit von Funktionen und Integration in abstrakten Räumen, Math. Annalen, Bd. 124 (1952), S. 343—363.

[4] *H. Hadwiger*, Deckungsäquivalenz und Zerlegungsäquivalenz bei Funktionen in abstrakten Räumen und invariante Integration, Archiv der Mathematik, vol. V (1954), S. 115—122.

[5] *H. Hadwiger* und *W. Nef*, Zur axiomatischen Theorie der invarianten Integration in abstrakten Räumen, Math. Zeitschrift, Bd. 60 (1954), S. 305—319.

[6] *W. Nef*, Zerlegungsäquivalenz von Funktionen und invariante Integration, Comm. Math. Helv., vol. 28 (1954), S. 162—172.

[7] *W. Nef*, Invariante Linearformen, erscheint demnächst in den Math. Nachrichten.

Über die Multiplizität eines isolierten Schnittpunktes von n Hyperflächen im R_n[1]

Von

Helmut Gigl, Innsbruck

(Eingelangt am 12. Dezember 1955)

Einleitung

n Hyperflächen $f_i(x) = f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *die im Ursprung O bzw. einen* m_1-, m_2-, $\ldots$, m_n-*fachen Punkt besitzen, schneiden sich in diesem Punkte mit einer Multiplizität, welche* $\geq m_1 \cdot m_2 \ldots m_n$ *ist. Wenn die Hyperflächen im Ursprung keine gemeinsame Tangente besitzen, ist die Multiplizität des Schnittpunktes genau gleich* $m_1 \cdot m_2 \ldots m_n$.

Algebraische Beweise dieses bekannten Satzes stammen von *O. Zariski*[2] und *O. Perron*[3]. Beide gehen von der Annahme aus, daß sich die Hyperflächen nur in endlich vielen Punkten schneiden. Es soll hier ein neuer idealtheoretischer Beweis angegeben werden, der insofern eine Verallgemeinerung des obigen Satzes ermöglicht, als nun die Annahme endlich vieler Schnittpunkte fallen gelassen werden kann und lediglich vorausgesetzt wird, daß der Schnittpunkt im Ursprung isoliert ist, während die Hyperflächen ohne weiteres noch höherdimensionale Mannigfaltigkeiten als gemeinsame Bestandteile enthalten können, die nicht durch den Ursprung gehen.

---

[1] Auszug aus einer im mathematischen Seminar der Universität Innsbruck ausgearbeiteten Dissertation.

[2] *O. Zariski*, Generalized Weight Properties of the Resultant of $n + 1$ Polynomials in n Indeterminates, Trans. American Math. Soc. 41, 249—265, 1937.

[3] *O. Perron*, Neuer Beweis zweier Sätze von Zariski über die Multiplizität einer Lösung von k Gleichungen mit k Unbekannten, Bayer. Akad. Wiss., Math.-naturw. Kl. 1954, 179—199.

Idealtheoretische Formulierung des Satzes

Es seien $f_i(x) = u_{m_i}^{(i)}(x) + \ldots$ die im Ursprung O nach Formen steigenden Grades entwickelten Gleichungen der Hyperflächen, betrachtet im affinen Raum R_n, und m_i die Grade der Anfangsformen $u_{m_i}^{(i)}(x)$. Weiters sei $\mathfrak{a} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ das von den Polynomen $f_i(x)$ im P-Ring $\mathfrak{o} = K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$[4] erzeugte inhomogene P-Ideal. Da die Hyperflächen im Ursprung nach Voraussetzung einen isolierten Schnittpunkt aufweisen, besitzt $\mathfrak{a}$ eine zum Primideal $\mathfrak{p} = (x_1, \ldots, x_n)$ gehörige, isolierte Primärkomponente $\mathfrak{q}$. Wir werden zeigen, daß die Länge von $\mathfrak{q}$:

$$1(\mathfrak{q}) \geq m_1 \cdot m_2 \ldots m_n \tag{1}$$

ist und daß das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn das von den Anfangsformen gebildete Ideal

$$\mathfrak{b} = (u_{m_1}^{(1)}, \ldots, u_{m_n}^{(n)}) \tag{2}$$

nulldimensional ist. Die Länge des Primärideals $\mathfrak{q}$ gibt uns die Multiplizität des Schnittpunktes an[5], die Anfangsform $u_{m_i}^{(i)}(x)$, gleich Null gesetzt, repräsentiert den Tangentenkegel der Hyperfläche $f_i(x) = 0$ im Ursprung und die Forderung, $\mathfrak{b} = (u_{m_1}^{(1)}, \ldots, u_{m_n}^{(n)})$ sei nulldimensional, ist offenbar gleichbedeutend mit der Forderung, daß die Hyperflächen im Ursprung keine gemeinsame Tangente besitzen.

Beweis

Um die Länge von $\mathfrak{q}$ zu bestimmen, wollen wir zunächst das vorgegebene Ideal $\mathfrak{a}$ von allen nicht zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Primärkomponenten befreien. Dies geschieht durch Übergang zum Potenzreihenring $\tilde{\mathfrak{o}}$[6]. Dabei geht $\mathfrak{a}$ über in das Erweiterungsideal $\tilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{o}}$. $\tilde{\mathfrak{a}}$ ist Primärideal[7] zu $\tilde{\mathfrak{p}}$. Wir bezeichnen es mit $\tilde{\mathfrak{q}}$. Das Verengungsideal $\tilde{\mathfrak{q}} \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{q}$. Weiters gilt[8]

$$1(\tilde{\mathfrak{q}}) = 1(\mathfrak{q}) \tag{3}$$

Für $\tilde{\mathfrak{q}}$ kann man dieselbe Basis wählen wie für $\mathfrak{a}$, d. h. die Elemente von $\tilde{\mathfrak{q}}$ haben die Gestalt $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 f_1 + \mathfrak{P}_2 f_2 + \ldots + \mathfrak{P}_n f_n$ mit $\mathfrak{P}_i \in \tilde{\mathfrak{o}}$.

[4] Der Grundkörper K ist von beliebiger Charakteristik und braucht auch nicht algebraisch abgeschlossen zu sein!

[5] Vgl. *W. Gröbner*, Moderne Algebraische Geometrie, Springer-Verlag Wien, 1949 (im folgenden zitiert mit ‚MAG'), S. 89ff.

[6] MAG, S. 149.

[7] MAG, S. 149.

[8] *W. Krull*, Idealtheorie, Springer-Verlag, Berlin, S. 61.

Die Anfangsformen p aller $\mathfrak{P} \in \tilde{\mathfrak{q}}$ bilden offenbar ein H-Ideal $\mathfrak{a}_0$ in $\mathfrak{o}$, das wir *Leitideal* von $\tilde{\mathfrak{q}}$ nennen wollen.

I. $\mathfrak{a}_0$ *ist Primärideal zu* $\mathfrak{p}$

Sei ϱ der Exponent von $\mathfrak{q}$, also $\mathfrak{p}^\varrho \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$; dann liegen alle Potenzprodukte des Grades $\geq \varrho$ in $\mathfrak{q}$, also auch in $\tilde{\mathfrak{q}}$ und mithin auch in $\mathfrak{a}_0$. Es ist also $\mathfrak{p}^\varrho \subseteq \mathfrak{a}_0$. Ferner gilt, da $\mathfrak{a}_0$ H-Ideal ist, $\mathfrak{a}_0 \subseteq \mathfrak{p}$. Aus $\mathfrak{p}^\varrho \subseteq \mathfrak{a}_0 \subseteq \mathfrak{p}$ folgt, da $\mathfrak{p}$ teilerlos ist, die Behauptung.

II. $1(\mathfrak{a}_0) = 1(\tilde{\mathfrak{q}})$, *also nach* (3) *gleich* $1(\mathfrak{q})$

Um die Gleichheit der Längen von $\mathfrak{a}_0$ und $\tilde{\mathfrak{q}}$ nachzuweisen, genügt es, ein vollständiges Restklassensystem mod $\mathfrak{a}_0$ anzugeben, das zugleich auch ein vollständiges Restklassensystem mod $\tilde{\mathfrak{q}}$ ist.

Sei $1, w_2, \ldots, w_l$ ein vollständiges Restklassensystem mod $\mathfrak{a}_0$. Die w_i können als Potenzprodukte gewählt werden, geordnet nach steigendem Grad. Sei weiters $\mathfrak{P}$ eine beliebige Potenzreihe aus $\mathfrak{o}$ mit dem Untergrad m, also $\mathfrak{P} = u_m + \ldots$ Dann ist

$$u_m \equiv c_1 + c_2 w_2 + \ldots + c_l w_l \,(\mathrm{mod}\ \mathfrak{a}_0),\ c_i \in K.$$

Daraus folgt

$$u_m - (c_1 + c_2 w_2 + \ldots + c_l w_l) = v_m \in \mathfrak{a}_0$$

Die Potenzreihe

$$\mathfrak{P} - (c_1 + c_2 w_2 + \ldots + c_l w_l) = v_m + \ldots \tag{4}$$

beginnt mit einer Form $v_m \in \mathfrak{a}_0$ (oder, falls $v_m = 0$ ist, mit einer Form, deren Grad $> m$ ist). Ist $v_m \neq 0$, so gibt es in $\tilde{\mathfrak{q}}$ eine Potenzreihe $\mathfrak{Q}$, deren Anfangslied v_m ist:

$$\mathfrak{Q} = v_m + \ldots \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt:

$$\mathfrak{P} - \mathfrak{Q} = c_1 + c_2 w_2 + \ldots + c_l w_l + \mathfrak{P}_1,\ \mathfrak{P}_1 = u_{m+1} + \ldots$$

(Ist $u_{m+1} = 0$, so hat $\mathfrak{P}_1$ einen höheren Untergrad).

Also ist

$$\mathfrak{P} \equiv \mathfrak{P} - \mathfrak{Q} \equiv c_1 + c_2 w_2 + \ldots + c_l w_l + \mathfrak{P}_1 \,(\mathrm{mod}\ \tilde{\mathfrak{q}}),$$

weil $\mathfrak{Q} = O(\tilde{\mathfrak{q}})$ ist. Eine analoge Darstellung läßt sich für $\mathfrak{P}_1$ finden:

$$\mathfrak{P}_1 \equiv d_1 + d_2 w_2 + \ldots + d_l w_l + \mathfrak{P}_2 \,(\mathrm{mod}\ \tilde{\mathfrak{q}}),\ \text{usw.}$$

Da dabei der Untergrad der $\mathfrak{P}_i$ bei jedem Schritt um mindestens eins erhöht wird und von einem Grad $\geq \varrho$ ab alle Potenzprodukte der x_i in

$\tilde{\mathfrak{q}}$ liegen, also auch jedes $\mathfrak{P}_i$ mir dem Untergrad $\geq \varrho$, so gelangt man schließlich nach höchstens ϱ Schritten zu einer Darstellung

$$\mathfrak{P} \equiv a_1 + a_2 w_2 + \ldots + a_l w_l \,(\mathrm{mod}\ \tilde{\mathfrak{q}}),\ a_i \in K.$$

Ferner erkennt man sogleich, daß das System $1, w_2, w_3, \ldots, w_l$ auch mod $\tilde{\mathfrak{q}}$ linear unabhängige Restklassen repräsentiert. Wäre nämlich $c_1 + c_2 w_2 + \ldots + c_l w_l \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ \tilde{\mathfrak{q}})$, $c_i \in K$, und nicht alle $c_i = 0$, so würde das von Potenzprodukten gleichen Grades gebildete Anfangsglied $c_i w_i + c_{i+1} w_{i+1} + \ldots + c_k w_k$, für das mindestens ein $c_j \neq 0$ sein muß, in $\mathfrak{a}_0$ liegen. Aus $c_i w_i + \ldots + c_k w_k \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ \mathfrak{a}_0)$, folgt aber $c_i = \ldots = c_k = 0$, entgegen der Voraussetzung, daß mindestens ein $c_j \neq 0$ ist.

Damit ist bewiesen:

III. $1(\mathfrak{a}_0) = 1(\mathfrak{q}) =$ *Multiplizität des gemeinsamen Schnittpunktes.*

IV. *Ist* $\mathfrak{b} = (u_{m_1}^{(1)}, \ldots, u_{m_n}^{(n)})$ *nulldimensional, so ist* $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{b}$.

Zunächst ist offenbar stets $\mathfrak{a}_0 \supseteq \mathfrak{b}$. Sei nun $\mathfrak{b}$ nulldimensional. Dann ist $\mathfrak{b}$ Primärideal zu $\mathfrak{p}$, weil $\mathfrak{p}$ teilerlos ist und eine Beziehung $\mathfrak{p}^\varrho \subseteq \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ für eine gewisse natürliche Zahl ϱ gilt. Zu jeder Form $p \in \mathfrak{a}_0$ gibt es nun eine Potenzreihe $\mathfrak{P} = p + \ldots \in \tilde{\mathfrak{q}}$. Ist der Grad von $p \geq \varrho$, so gilt sicher $p \in \mathfrak{b}$, wegen $p \in \mathfrak{p}^\varrho \subseteq \mathfrak{b}$. Es sei also der Grad von $p < \varrho$ und $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 f_1 + \ldots + \mathfrak{P}_n f_n \in \tilde{\mathfrak{q}}$ die zugehörige Potenzreihe. Ist dann p_i die Anfangsform von $\mathfrak{P}_i$ und $u_{m_i}^{(i)}$ jene von f_i und bilden wir die Summe der Formen niedersten Grades in der Darstellung von $\mathfrak{P}$, so ist entweder

$$p_{i_1} u_{m_{i_1}}^{(i_1)} + \ldots p_{i_r} u_{m_{i_r}}^{(i_r)} = p, \text{ also } p \in (u_{m_1}^{(1)}, \ldots, u_{m_n}^{(n)}) = \mathfrak{b} \tag{6}$$

oder es ist

$$p_{i_1} u_{m_{i_1}}^{(i_1)} + \ldots + p_{i_r} u_{m_{i_r}}^{(i_r)} = 0 \tag{7}$$

Im zweiten Fall hat man $p_{i_1} u_{m_{i_1}}^{(i_1)} = -p_{i_2} u_{m_{i_2}}^{(i_2)} - \ldots - p_{i_r} u_{m_{i_r}}^{(i_r)}$ und da $\mathfrak{b}$ Hauptklassenideal[9] ist:

$$p_{i_1} \in (u_{m_{i_2}}^{(i_2)}, \ldots, u_{m_{i_r}}^{(i_r)}) : u_{m_{i_1}}^{(i_1)} = (u_{m_{i_2}}^{(i_2)}, \ldots, u_{m_{i_r}}^{(i_r)})$$

Daraus folgt für p_{i_1} eine Darstellung:

$$p_{i_1} = a_{i_2} u_{m_{i_2}}^{(i_2)} + \ldots + a_{i_r} u_{m_{i_r}}^{(i_r)},\ a_{i_k} \in \mathfrak{o}. \tag{8}$$

Nun bilden wir die Potenzreihen:

---

[9] MAG, S. 122ff.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}^*_{i_1} &= \mathfrak{P}_{i_1} - a_{i_2} f_{i_2} - \ldots - a_{i_r} f_{i_r} \\
\mathfrak{P}^*_{i_2} &= \mathfrak{P}_{i_2} + a_{i_2} f_{i_1} \\
&- - - - - - \\
\mathfrak{P}^*_{i_r} &= \mathfrak{P}_{i_r} + a_{i_r} f_{i_r} \\
\mathfrak{P}^*_{i_{r+1}} &= \mathfrak{P}_{i_{r+1}} \\
&- - - - \\
\mathfrak{P}^*_{i_n} &= \mathfrak{P}_{i_n}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Dann gilt, wie man leicht nachprüft:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^*_{i_1} f_{i_1} + \ldots + \mathfrak{P}^*_{i_n} f_{i_n} = \mathfrak{P}_{i_1} f_{i_1} + \ldots + \mathfrak{P}_{i_n} f_{i_n}$$

Ist $G(p)$ der Grad von p, so folgt aus (7) und (8)

$$G(p_{i_1}) + m_{i_1} = G(p_{i_2}) + m_{i_2} = \ldots = G(p_{i_r}) + m_{i_r} \tag{10}$$

$$G(p_{i_1}) = G(a_{i_2}) + m_{i_2} = \ldots = G(a_{i_r}) + m_{i_r} \tag{11}$$

Weiters folgt aus (9), (10) und (11), wenn man den Untergrad der Potenzreihe $\mathfrak{P}$ mit $UG(\mathfrak{P})$ bezeichnet:

$$UG(\mathfrak{P}^*_{i_1} f_{i_1}) > G(p_{i_1}) + m_{i_1}$$

$$UG(\mathfrak{P}^*_{i_k} f_{i_k}) \geq G(p_{i_k}) + m_{i_k}, \quad k = 2, 3, \ldots, r$$

Also hat sich der Untergrad von $\mathfrak{P}^*_{i_1} f_{i_1}$ gegenüber dem von $\mathfrak{P}_{i_1} f_{i_1}$ erhöht, während die Untergrade der übrigen Glieder jedenfalls nicht kleiner geworden sind. Indem man für $\mathfrak{P}^*_{i_k} f_{i_k}$ $(k = 2, \ldots, r)$ das Verfahren wiederholt, gelangt man schließlich zu einer Darstellung von $\mathfrak{P}$, bei der der Untergrad sämtlicher Glieder $\mathfrak{P}^*_{i_k} f_{i_k}$ größer geworden ist und durch weitere Fortsetzung des Verfahrens erreicht man nach endlich vielen Schritten den Untergrad von $\mathfrak{P}$, d. h. es ist $p \in \mathfrak{b}$ für jede Form $p \in \mathfrak{a}_0$, also $\mathfrak{a}_0 \subseteq \mathfrak{b}$. Dies ergibt mit $\mathfrak{a}_0 \supseteq \mathfrak{b}$ die Behauptung.

V. *Ist* $\mathfrak{b}$ *nulldimensional, so ist* $1(\mathfrak{b}) = m_1 \ldots m_n$

Sei $\mathfrak{b}$ nulldimensional, also ein Ideal der Hauptklasse, und $H(t, \mathfrak{b})$ die Hilbertfunktion von $\mathfrak{b}$ als homogenes Ideal des H-Ringes $K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$. Dann ist $H(t, \mathfrak{b})$ für hinreichend große Werte von t gleich der Anzahl der linear unabhängigen Restklassen des Restklassenringes $K[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{b}$ also gleich $1(\mathfrak{b})$[10]. Da $H(t, \mathfrak{b}) = m_1 \ldots m_n$[11] ist, ist unsere Behauptung bewiesen.

[10] MAG, S. 160.
[11] MAG, S. 164.

VI. *Ist* $\mathfrak{b}$ *nicht nulldimensional, so ist* $1(\mathfrak{q}) > m_1 m_2 \ldots m_n$

Zum Beweis betrachten wir Polynome $\bar{f}_i$ mit allgemeinen Anfangsformen $\bar{u}_{m_i}^{(i)}$ des Grades m_i, deren unbestimmte Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots$ zum Grundkörper K adjungiert werden. In den höheren Graden mögen die $\bar{f}_i$ mit den f_i übereinstimmen. Sei weiters $\bar{\mathfrak{q}}$ die zum Primideal $\mathfrak{p} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gehörige, isolierte Primärkomponente von $\bar{\mathfrak{a}} = (\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n) \subset K(a_1, a_2, \ldots)[x_1, \ldots, x_n]$. Dann ist $1(\bar{\mathfrak{q}}) = m_1 \ldots m_n$, da das von den Anfangsformen der $\bar{f}_i$ gebildete Ideal $\bar{\mathfrak{b}} = (\bar{u}_{m_n}^{(n)}, \ldots \bar{u}_{m_n}^{(n)})$ nulldimensional ist. Für $\bar{\mathfrak{q}}$ gibt es eine Darstellung:

$$\bar{\mathfrak{q}} = (\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n, \mathfrak{p}^\sigma)$$

gültig für alle natürlichen Zahlen $\sigma \geq \varrho$, wobei ϱ der Exponent von $\bar{\mathfrak{q}}$ ist. $\bar{\mathfrak{q}}$ enthält $N = \binom{n+\sigma-1}{n} - m_1 \ldots m_n$ linear unabhängige Polynome vom Grad $< \sigma$. Sei $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_N$ ein System von linear unabhängigen Polynomen dieser Art. Die $\bar{g}_i$ denken wir uns aus den $\bar{f}_i$ durch Multiplikation mit allen Potenzprodukten vom Grad $< \sigma - m_i$ erzeugt und die dabei auftretenden linear abhängigen Polynome aus den $\bar{g}_i$ entfernt, so daß genau N linear unabhängige Polynome übrig bleiben. Die Anfangsformen der $\bar{g}_i$ bezeichnen wir mit $\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_N$. Sie repräsentieren Elemente aus $\bar{\mathfrak{a}}_0$, deren Grad $< \sigma$ ist. Aus $\bar{\mathfrak{a}}_0 = \bar{\mathfrak{b}}$, also $1(\bar{\mathfrak{a}}_0) = 1(\bar{\mathfrak{b}})$, folgt ihre lineare Unabhängigkeit.

Die Primärkomponente $\mathfrak{q} = (f_1, f_2, \ldots, f_n, \mathfrak{p}^\sigma)$ entsteht aus $\bar{\mathfrak{q}}$ durch Spezialisierung der unbestimmten Koeffizienten der $\bar{u}_{m_i}^{(i)}$ zu denjenigen der $u_{m_i}^{(i)}$ (für das in $\bar{\mathfrak{q}}$ und $\mathfrak{q}$ auftretende σ wählen wir den größeren der Exponenten von $\bar{\mathfrak{q}}$ und $\mathfrak{q}$). Bei dieser Spezialisierung entsteht aus den $\bar{g}_i$ das System der linear unabhängigen Polynome $g_1, \ldots, g_{N'}$ aus $\mathfrak{q}$, wobei $N \geq N'$ ist, da der Rang N der von den Koeffizienten der Polynome $\bar{g}_i$ gebildeten Matrix bei der Spezialisierung keinesfalls zunehmen kann und daher auch nicht mehr linear unabhängige Polynome entstehen können... Daraus folgt $1(\mathfrak{q}) \geq 1(\bar{\mathfrak{q}})$.

Ist $N > N'$, so ist unsere Behauptung bereits bewiesen. Wir nehmen also an, es sei $N = N'$, d. h. $g_1, \ldots, g_N$ linear unabhängig. Die bei der Spezialisierung aus den $\bar{w}_i$ entstehenden Formen $w_1, \ldots, w_N$ sind, da $\mathfrak{a}_0 \supset \mathfrak{b}$ ist, sicher linear abhängig.

Sei μ der Grad der Formen w_i, zwischen denen eine lineare Abhängigkeit zum ersten Mal auftritt. Dann müssen auch die w_i des nächstfolgenden Grades linear abhängig sein, da aus $c_1 w_{i_1} + \ldots + c_r w_{i_r} = 0$

und $G(w_{i_k}) = \mu$ folgt, daß auch $x_i(c_1 w_{i_1} + \ldots + c_r w_{i_r}) = 0$ für $j = 1, 2, \ldots, n$ ist. Daraus folgt weiters, daß auch wie w_i des Grades $\sigma - 1$ linear abhängig sein müssen. Diese aber stimmen mit den g_i des Grades $\sigma - 1$ überein, deren lineare Abhängigkeit damit bewiesen ist. Die Annahme $N' = N$ führt somit auf einen Widerspruch. Es muß stets $N' < N$, also $1(\mathfrak{q}) > 1(\bar{\mathfrak{q}}) = m_1 \ldots m_n$ sein.

Zur konformen Kurventheorie

Von

H. Götz, Wien

(Eingelangt am 25. Januar 1956)

I. Einleitung

Jedem Punkt einer in pentasphärischen Koordinaten gegebenen Kurve (der Klasse ≥ 5) im dreidimensionalen, konformen Raum[1] C^3 ordnen wir nach *E. Cartan* [1] [2] ein „repère mobile naturel" zu, das aus drei zueinander orthogonalen Kugeln und deren beiden Schnittpunkten besteht. (Es gibt genau eine „gleichsinnige", konforme Transformation[2], die ein „repère mobile naturel" in ein anderes, beliebig vorgegebenes, überführt.)

Durch eine Spezialisierung der Ableitungsgleichungen wählen wir ein bestimmtes, mit der Kurve invariant verbundenes „repère" aus und erhalten dadurch zwei wesentliche konforme Invarianten der Kurve, die wir wegen mancher Analogie mit der euklidischen Kurventheorie als Krümmung und Windung bezeichnen[3].

Wir geben eine konformgeometrische Interpretation dieser Größen. Die Normierung der pentasphärischen Kurvenkoordinaten ist ohne Verwendung der Ableitungen nicht möglich. Es erscheint daher (auch geometrisch) zweckmäßig, zunächst von einer invarianten Normierung abzusehen und einen halbinvarianten Differentiationsprozeß einzuführen, was nach *G. Reeb* [4] möglich ist.

---

[1] Siehe *Blaschke-Thomsen*, Differentialgeometrie III [8], Seite 259—262.

[2] Die gleichsinnigen, konformen Transformationen bilden die Untergruppe M_{10}^{+} der gew. konformen Gruppe M_{10}. Siehe [8], S. 35—38 und [3].

[3] Vgl. *G. Thomsen* [3], wo bei Besprechung der Raumkurven die sphärischen ausgeschlossen sind.

II. „Repère mobile naturel" und halbinvariante Differentiation[4]

Wir bezeichnen mit X, Y die Punkte, mit A_1, A_2, A_3 die zueinander orthogonalen Kugeln eines „repère mob. nat." $\mathfrak{R}$ im C^3. Es gilt nach Vornahme einiger zulässiger Normierungen

$$\begin{matrix} XX = YY = XA_i = YA_i = 0 \\ XY = 1 \qquad A_i A_k = \delta_{ik} \end{matrix} \qquad (i, k \ldots = 1, 2, 3) \qquad (2.1)$$

wenn XX, XY, XA_i usw. die skalaren Produkte der zugehörigen pentasphärischen Koordinaten bedeuten.

Aus einer Umnormierung

$$X \to \varrho X \qquad (2.2)$$

folgt daher $\quad Y \to \dfrac{1}{\varrho} Y.$

Die pentasphärischen Koordinaten X, Y, A_1, A_2, A_3 seien nun genügend oft differenzierbare Funktionen von $p \in V^n$, wobei mit V^n eine offene Menge des n-dim. cartesischen Raumes bedeutet ($n \leq 3$). Die Beziehungen (2.1) sollen dabei erhalten bleiben.

Das solcherart entstandene Gebilde $\mathfrak{R}(X, Y, A_i)$ fassen wir als Punktmannigfaltigkeit der X mit zugeordneten Vektorräumen $T(X)$ auf.

$$T: X \to (X, Y, A_1, A_2, A_3) \qquad (2.3)$$

Die durch (2.2)[5] in der *Cartan*schen Algebra C_X über $T(X)$ induzierten Transformationen können recht unübersichtlich werden. Daher modifizieren wir die Ableitungen der Differentialformen aus C_X, wie folgt:

$\omega \in C_x$ transformiere sich bei (2.2) mit dem Gewicht c, d. h.:

$$\omega \to \varrho^c \omega \qquad (c \text{ ganz}) \qquad (2.4)$$

Wir suchen nun eine Ableitung $\vartheta\omega$ von ω zu bestimmen, für die außer den üblichen Eigenschaften die Transformation

$$\vartheta\omega \to \varrho^c \vartheta\omega$$

bei (2.2) gelten soll.

Es sei eine Differentialform $\pi \in C_X$ gegeben mit der Transformation

[4] Da in einer weiteren Arbeit konforme Kurven- und Flächentheorie in Zusammenhang gebracht werden sollen, beginnen wir hier etwas allgemeiner als für unser spezielles Problem nötig wäre.

[5] Dabei setzen wir $\varrho_{(p)}$ als genügend oft differenzierbare Funktion von p voraus.

$$\pi \to \pi - \frac{d\varrho}{\varrho} \tag{2.5}$$

bei (2.2).

Wir definieren als „halbinvariante Ableitung" $\vartheta\omega$:

$$\vartheta\omega = d\omega + c\,[\pi\,\omega], \tag{2.6}$$

die sich bei (2.2) wie ω verhält, d. h. $\vartheta\omega \to \varrho^c\,\vartheta\omega$, was sofort nachzuweisen ist.

Die Regeln für die Ableitung von Summe und Produkt gelten wie im *Cartan*schen Kalkül. Man hat allerdings

$$\vartheta(\vartheta\omega) = c[d\,\pi.\omega]$$

so daß $\vartheta(\vartheta\omega) = 0$ mit der Aussage, π sei ein vollständiges Differential, äquivalent ist. In diesem Fall ist eine Normierung $\pi - \frac{d\varrho}{\varrho} = 0$ naheliegend, die ϱ bis auf einen konstanten Faktor bestimmt.

III. Konforme Kurventheorie

Die Ableitungsgleichungen des Vektorraumes $T(X)$, bei $n = 1$ [6] unter Berücksichtigung von (2.1)

$$\begin{aligned} \vartheta X &= \sigma_i A_i + \sigma_0 X \\ \vartheta Y &= \tau_i A_i - \sigma_0 Y \qquad (\omega_{ik} + \omega_{ki} = 0) \\ dA_i &= \omega_{ik} A_k - \sigma_i Y - \tau_i X \end{aligned} \tag{3.1}$$

werden als Grundgleichungen der konformen Kurventheorie im C^3 bezeichnet. Die Bestimmung von π ist hier außerordentlich einfach:

Aus $\vartheta X = \sigma_i A_i + \sigma_0 X$ folgt $Y\vartheta X = \sigma_0$ und

$$\pi = \sigma_0 - Y dX. \tag{3.2}$$

Als erste Spezialisierung unseres „repère" setzen wir $\sigma_0 = 0$, d. h.

$$\pi = -Y dX \tag{3.2a}$$

Sodann bestimmen wir A_3 als Berührungskugel der Kurve, d. h.: $\sigma_3 = 0$. Bis hieher stimmen die Ableitungsgleichungen der Kurven- und Flächentheorie formal überein.

Doppelte Berührung von A_3 ergibt $A_3\vartheta^2 X = 0$ oder $\sigma_1\omega_{13} + \sigma_2\omega_{23} = 0$. Berührung von A_2, d. h. $\sigma_2 = 0$ führt mit dem Vorigen zusammen zu $\omega_{13} = 0$.

[6] Die Beziehung $\vartheta(\vartheta\omega) = c[d\,\pi\,.\,\omega]$ hat natürlich nur für $l > 1$ einen Sinn.

A_3 wählen wir nun als Schmiegkugel, A_2 als dazu orthogonale Kugel, die den Krümmungskreis enthält. Daraus folgen sehr leicht ableitbare Festsetzungen für die σ_i, ω_{ik} und τ_i. Alles in allem erhalten wir:

$$\sigma_0 = \sigma_2 = \sigma_3 = \tau_3 = \omega_{12} = \omega_{13} = 0 \tag{3.3}$$

Bei Berücksichtigung der Gewichte der einzelnen Differentialformen sind von einer Umnormierung (2.2) unabhängig:

$$(\sigma_1\,\tau_1),\ (\sigma_1\,\tau_2),\ \omega_{23}.^{7} \tag{3.4}$$

Es bleibt noch die Festlegung von A_1 oder, was auf dasselbe hinausläuft, von Y. Wir haben dazu sozusagen den „geometrischen Teil" von π mit den σ_i, ω_{ik} und τ_i in Beziehung zu bringen, da weitere invariante Beziehungen zwischen den übrigbleibenden σ_i, ω_{ik} und τ_i entweder die Normierung bestimmen oder zu speziellen Kurven führen würden, was leicht nachzuprüfen ist.

Wir setzen in naheliegender Weise

$$\sigma_1\,\vartheta\tau_2 = \tau_2\,\vartheta\sigma_1 \tag{3.5}$$

oder explizit

$$d\left(\log\frac{\sigma_1}{\tau_2}\right) = 2\,\pi. \tag{3.5a}$$

Da wir für $\pi = 0$, σ_1 als Bogenlänge einführen wollen, außerdem σ_1 von möglichst niedriger Ordnung in X sein soll, sind, wie man leicht nachprüfen kann, andere ähnliche Festsetzungen wie (3.5) nicht zweckmäßig. (Z. B. $\tau_1\,\vartheta\sigma_1 = \sigma_1\,\vartheta\tau_2$ usw.).

Aus (3.1) ergibt sich bei Berücksichtigung von (3.3)

$$ds^2 = (\sigma_1, \tau_2) = \sqrt[2]{\frac{\|\,X, dX, d^2X, d^3X\,\|^2}{(dX\,dX)^4}}\,dt^2 \tag{3.6}$$

wobei der Zähler unter der Wurzel $-\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2+\lambda_4^2$ bedeutet, wenn λ_k die Unterdeterminante der Matrix $\|\,X, dX, d^2X, d^3X\,\|$ darstellt, die durch Wegstreichen der k-ten Zeile erhalten wird. (Siehe *G. Thomsen* [3], S. 145, Fußn.)

In (3.6) könnten wir natürlich ebenso ϑX usw. anstatt dX usw. schreiben. (3.6) ist gerade das Quadrat der von *Liebmann* eingeführten Bogenlänge, dritter Ordnung.

---

[7] Dabei schreiben wir (σ, τ) für $f(t)\,g(t)\,dt^2$, wenn $\sigma = f(t)\,dt$, $\tau = g(t)\,dt$ bedeutet. Wir setzen $d\sigma = f'(t)\,dt^2$ und $\vartheta\sigma = d\sigma + c(\pi\sigma)$, wenn sich σ mit dem Gewichte c bei Umnormierung (2.2) transformiert. $\vartheta\sigma$ verhält sich bei (2.2) genau so wie σ. Dieser Erweiterung kommt nur formale Bedeutung zu.

Für $\pi = 0$ erhalten wir

$$ds = \text{const.}\ \sigma_1 \tag{3.7}$$

was wir gerade erreichen wollten. (Folge von (3.5)).

Die Orientierung der Kurve legen wir durch

$$\operatorname{sig} \sqrt{|(\sigma_1\, \tau_2)|} = \operatorname{sig} |\, X\, A_1\, A_2\, A_3\, Y\,| \tag{3.8}$$

fest, also invariant gegenüber der M_{10}^{+}. Nunmehr führen wir

$$\frac{(\sigma_1\, \tau_1)}{(\sigma_1\, \tau_2)} = K \qquad \frac{{\omega_{23}}^2}{(\sigma_1\, \tau_2)} = W^2 \tag{3.9}$$

als Krümmung und als Windung ein.

Satz: $W = 0$ ist notwendig und hinreichend für sphärische Kurven. Der Beweis ergibt sich aus (3.1) und (3.3).

Setzen wir nun $W = 0$, also $A_3 = \text{const.}$, so können wir durch eine konforme Transformation η, A_3 in die euklidische (x_1, x_2)-Ebene überführen.

$$\eta(A_3) = \bar{A}_3 = (0, 0, 0, 0, 1)$$

(Wir lassen im Folgenden den Strich wieder weg.) Betrachten wir nun anstatt der Kugeln deren Schnittkreise mit A_3, d. h. lassen wir die 5. Koordinate weg, so ergeben die anderen 4 die tetrazyklischen Koordinaten in der $(x_1\, x_2)$-Ebene und die Gleichungen (3.1) schreiben sich bei Berücksichtigung von (3.3):

$$\begin{gathered} \vartheta x = \sigma_1 A_1 \\ dA_1 = -\tau_1 X - \sigma_1 Y,\ dA_2 = -\tau_2 X \\ \vartheta Y = \tau_1 A_1 + \tau_2 A_2 \end{gathered} \tag{3.10}$$

Das Kurvenelement (3.6) geht über in das ebenfalls von *Liebmann* [5] eingeführte:

$$ds^2 = |\,(\sigma_1\, \tau_2)\,| = \left| \frac{|\, X, dX, d^2X, d^3X\,|}{(dX, dX)^2} \right| dt^2 \tag{3.11}$$

(Über den engen Zusammenhang mit der *Schwarz*schen Differentialinvariante siehe z. B. *Van der Woude* [6].)

Auch $\dfrac{(\sigma_1\, \tau_1)}{(\sigma_1\, \tau_2)}$ stimmt im wesentlichen mit der bekannten „konformen Krümmung" überein. (*Van der Woude* [6], *Maeda* [7]).

Die Orientierung wird infolge von (3.8) festgelegt durch:

$$\operatorname{sig} \sqrt{|\,(\sigma_1\, \tau_2)\,|} = \operatorname{sig} |\, X\, A_1\, A_2\, Y\,| \tag{3.8a}$$

IV. Geometrische Interpretation

Wir wählen hiezu o. B. d. A. die Normierung. $\pi = 0$. Die in (3.7) aufscheinende Konstante bestimmen wir durch $\sigma_1 = \tau_2$, sodaß σ_1 zum Bogenelement wird. Unter Berücksichtigung alles Vorigen erhalten wir sodann für die Ableitungsgleichungen: (Die Striche bedeuten die Ableitung nach der Bogenlänge).

$$\begin{gathered} X' = A_1 \\ A_1' = -K X - Y;\ A_2' = -X + W A_3 \\ A_3' = -W A_2 \\ Y' = K A_1 + A_2 \end{gathered} \tag{4.1}$$

Die Ausdrücke für die Invarianten K, W schreiben sich folgendermaßen:

$$W^2 = |\, X, X', X'', X''', X'''' \,|^2 \qquad K = (X''\ X'') \tag{4.2}$$

(Natürlich kann man entsprechende Ausdrücke auch angeben, ohne die Normierung vorher fixirt zu haben, z. B. $K = \left(\frac{d\left(\frac{\vartheta X}{\sigma_1}\right) d\left(\frac{\vartheta X}{\sigma_1}\right)}{(\sigma_1 \tau_2)} \right)$ usw.)

Zur geometrischen Interpretation des Punktes Y beweisen wir zunächst folgenden Satz:

Y ist der Schnittpunkt von A_2, A_3 und B, wobei diese Kugel durch $BB{=}1 \quad BA_3 = BX = 0$ gegeben ist. Außerdem geht B durch diejenigen Enveloppenpunkte $Z_1\, Z_2$ der Kugeln $A_2 + X$, bzw. $A_2 - X$, die auf A_3 liegen.

Beweis: (a) $B = \alpha X + \beta A_1 + \gamma A_2$

außerdem nach Vorauss. (b) $BZ_1 = 0 \quad BZ_2 = 0$

wobei $Z_1 = \mu (X - A_1 + A_2 - Y)$

$Z_2 = \bar{\mu} (X + A_1 - A_2 - Y)$ ist.

Aus Kombination von (a) und (b) erhalten wir $\alpha = 0$. q. e. d.

Es bleibt noch die geometrische Interpretation von $A_2 \pm X$.

Führen wir die zum Punkt $s = s_0$ gehörige Schmiegkugel in $(0,0,0,0,1)$ über, so gehen die beiden Schnittkreise von $A_2 \pm X$ mit A_3 gerade in die zum Kurvenelement 3. Ordnung gehörigen Hauptkreise über. Sie wurden von *G. Thomsen* [3], [8] in die ebene Kurventheorie eingeführt. (Ihre geometrische Interpretation (vgl. *Maeda* [7]) überträgt sich sofort

auf den Raum, da die Schmiegkugel ebenfalls von 3. Ordnung von der Kurve abhängt.

Hiermit ist Y konformgeometrisch bestimmt.

Dieser Sachverhalt überträgt sich auf den ebenen Fall, wie man aus dem oben durchgeführten Übergang zu den ebenen Ableitungsgleichungen sieht.

Bezeichnen wir mit $d\varphi_3$ den Winkel konsekutiver Schmiegkugeln, mit $d\varphi$ den konsekutiver Hauptkreise, so gilt

$$ds^2 = d\varphi^2 + d\varphi_3^2.$$

Für den ebenen Fall ($d\varphi_3 = 0$) ergibt sich die bereits bekannte Tatsache. Für die Krümmung bekommen wir aus (4.1)

$2K\,ds^2 = d\varphi_1^2$ ($d\varphi_1$ Winkel konsekutiver Normalkugeln A_1), für die Windung

$W^2\,ds^2 = d\varphi_2^2 = d\varphi_3^2$ ($d\varphi_2$ Winkel konsekutiver Krümmungskugeln).

Mit K, W haben wir ein vollständiges, geometrisch bedeutsames Invariantensystem erhalten, das eine gemeinsame Betrachtung der ebenen und räumlichen Kurventheorie gestattet und sich für die Anwendung in der Flächentheorie als recht zweckmäßig erweisen wird.

Literatur

[1] *E. Cartan*, Les espaces à connexion conforme. Ann. de la Société Polonaise II, Warschau 1923.

[2] *E. Cartan*, La théorie des groupes finis et continus et la géometrie différentielle, traitée par la méthode du repère mobile. Paris 1937.

[3] *G. Thomsen*, Über Kreisscharen und Kurven in der Ebene, über Kugelscharen und Kurven im Raum. Hamburger math. Abh. 1926.

[4] *G. Bol*, Alternierende Formen und halbinvariante Differentiation. Math. Zeitschrift, Bd. 54, 1951.

[5] *H. Liebmann*, Beiträge zur Inversionsgeometrie der Kurven. Münchener Berichte 1923.

[6] *W. Van der Woude*, On conformal differential geometry. Theory of plane curves. Ind. math. Vol. X., Fasc. 1, 1948.

[7] *J. Maeda*, Geometrical meanings of the inversion curvature of a plane curve. Jap. Journ. of Math., Vol. 16, 1940.

[8] *W. Blaschke*, Lehrbuch der Differentialgeometrie III. Berlin 1929.

Bemerkung zu meiner Arbeit „Randvorgaben bei infinitesimaler Verbiegung konvexer Flächen*

Von

Eduard Rembs, Berlin

(Eingelangt am 3. Februar 1956)

Während bei Vorgabe der Variation δk der Randkrümmung die Charakteristik des Biegungsproblems sich leicht zu $+2$ ergab, konnte die analoge Frage bei Vorgabe der geodätischen Torsion δa des Randstreifens nur für Teile einer Kugel beantwortet werden. Ich will jetzt zeigen, daß diese Beschränkung überflüssig ist.

Ich knüpfe an die Formel (2a) der Arbeit an und schreibe sie in der Form

$$[(Eu'+Fv')\,v'+(Fu'+Gv')\,u']\,\beta+[(Eu'+Fv')\,u'-(Fu'+Gv')\,v']\,\alpha=\delta a$$

oder

$$[(\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}_u)\,v'+(\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}_v)\,u']\,\beta+[(\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}_u)\,u'-(\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}_v)\,v']\,\alpha=\delta a.$$

Man setze wieder

$$\dot{u}=-\sin\vartheta,\quad \dot{v}=\cos\vartheta$$

und ferner

$$(*)\quad (\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}_u)=-W\sin\omega,\quad (\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}_v)=W\cos\omega,\quad W^2=(\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}_u)^2+(\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}_v)^2.$$

Dann erhält man

$$\sin(\vartheta+\omega)\,\beta+\cos(\vartheta+\omega)\,\alpha=-\dot{s}\,W^{-1}\,\delta a.$$

ϑ ist der Winkel, den die Normale der Randkurve Γ in der Parameterebene mit der u-Achse bildet. Er wächst bei einmaligem Durchlaufen von Γ in positivem Sinn um 2π. Aber auch ω kann in der Parameterebene gedeutet werden. Der Vektor

$$\mathfrak{n}=(\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}_v)\,\mathfrak{x}_u-(\mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}_u)\,\mathfrak{x}_v$$

liegt in der Tangentialebene der Fläche und ist senkrecht zum Rand C derselben, da $(\mathfrak{n}\,\mathfrak{x}')$ verschwindet. Er weist überall in das Äußere des

* Mh. Math. **60**, 57 (1956).

Bereichs, da $\mathfrak{n} \times \mathfrak{x}' = \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v$ ist. Dasselbe gilt dann wegen (*) von dem Vektor

$$\mathfrak{x}_u \cos\omega + \mathfrak{x}_v \sin\omega.$$

In der Parameterebene entspricht ihm als Bildvektor der Vektor mit den Komponenten $\cos\omega$, $\sin\omega$. Demnach ist ω der Winkel, den der Bildvektor von $\mathfrak{n}$ in der Parameterebene mit der u-Achse bildet. Im allgemeinen wird der Bildvektor nicht zu Γ senkrecht sein, aber er wird auch überall nach außen weisen. Das ist ausreichend dafür, daß ω bei einem Umlauf längs Γ in positivem Sinn um 2π wächst. Dann wächst $\vartheta + \omega$ um 4π.

Da nun die Charakteristik $+2$ ist, gilt analog zur Vorgabe von δk: *Eine konvexe Fläche mit einem Rand ist starr, wenn die Variation δa der geodätischen Torsion am ganzen Rand gleich 0 sein soll; wird $\delta a \neq 0$ vorgegeben, so existiert eine zugehörige infinitesimale Verbiegung nur dann, wenn δa 3 unabhängigen Integralbedingungen genügt.* Wie diese Bedingungen aber lauten, ist ebenso wie im Fall δk vorerst nicht bekannt.

Über ZPE-Ringe in der algebraischen Geometrie

Von

J. Leicht, Innsbruck

(Eingelangt am 9. März 1956)

In der algebraischen Geometrie spielen ZPE-Ringe (Ringe, in denen der Satz von der eindeutigen Zerlegbarkeit eines beliebigen Elementes in unzerlegbare gültig ist) eine wichtige Rolle. ZPE-Ringe sind z. B.

1. trivialerweise alle Körper;

2. transzendente Ringerweiterungen $K[x_1, \ldots, x_n]$ eines Körpers (oder ZPE-Ringes) K;

3. Der Ring $K\{x_1, \ldots, x_n\}$ aller formalen Potenzreihen über einem Körper (oder einem Hauptidealring);

4. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in $K[x_1, \ldots, x_n]$ (oder allgemeiner in einem beliebigen ZPE-Ring), R der Ring aller Brüche $\dfrac{p(x_1, \ldots, x_n)}{q(x_1, \ldots, x_n)}$ mit $q \not\equiv 0(\mathfrak{p})$. Die Einheiten von R sind genau die Brüche p/q mit $p \not\equiv 0(\mathfrak{p})$. *$R$ ist ZPE-Ring*: Ist $p = p_1 p_2 \ldots p_s$ die Zerlegung von p in Primelemente innerhalb $K[x_1, \ldots, x_n]$, in der etwa $p_1, p_2, \ldots, p_r \equiv 0(\mathfrak{p})$ und $p_{r+1}, p_{r+2}, \ldots, p_s \not\equiv 0(\mathfrak{p})$ seien, so ist $\dfrac{p}{q} = \left(\dfrac{p_{r+1} p_{r+2} \cdots p_s}{q}\right) p_1 p_2 \cdots p_r$ die bis auf Einheiten eindeutige Zerlegung von p/q innerhalb R. $\left(\dfrac{p_{r+1} p_{r+2} \cdots p_s}{q}\right.$ ist wegen $p_{r+1} p_{r+2} \ldots p_s \not\equiv 0(\mathfrak{p})$ Einheit von $\left.R\right)$.

5. In Verallgemeinerung eines Ergebnisses von *F. Klein*[1] hat *F. Severi*[2] gezeigt, daß für $n \geqslant 4$ im n-dimensionalen euklidischen Raum jede $(n-2)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit einer singularitätenfreien Hyperfläche V_{n-1} als vollständiger Schnitt von V_{n-1} mit einer anderen Hyperfläche V' darstellbar ist. *M. Noether*[3] bewies dasselbe für $n = 3$,

---

[1] Siehe [1].
[2] Siehe [2].
[3] Siehe [3].

falls V_{n-1} eine Ordnung $\geqslant 4$ hat. Dem entspricht nach *W. Gröbner*[4] der folgende algebraische Sachverhalt:

Für $n \geqslant 4$ ist der Restklassenring $K[x_1, \ldots, x_n]/f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nach einem irreduziblen allgemeinen (insbesondere nach einem singularitätenfreien) Polynom $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ein ZPE-Ring. Das gilt auch noch für $n = 3$, wenn f einen Grad $\geqslant 4$ hat.

Es gibt verschiedene Kriterien dafür, daß ein Ring ZPE-Ring ist. Am geläufigsten ist wohl das folgende:

Ein Integritätsbereich (mit oder ohne Einselement) ist ZPE-Ring dann und nur dann, wenn in ihm gilt:

1. Eine Kette von Elementen, in der jedes echter Teiler des vorhergehenden ist, kann nur endlich viele Glieder enthalten;

2. für unzerlegbares p folgt aus p/ab und $p \nmid a$ immer p/b.

(Die Zerlegbarkeit in unzerlegbare Elemente wird durch 1., die Eindeutigkeit der Zerlegung durch 2. gewährleistet.)

Ein davon wesentlich verschiedenes Kriterium hat *H. Hasse*[5] und an ihn anknüpfend *W. Krull*[6] angegeben. Das Kriterium von *Hasse* lautet:

Ein Integritätsbereich mit Einselement ist dann und nur dann Hauptidealring, wenn über ihm eine „Betragsfunktion" $|a|$ definiert werden kann, die jedem seiner Elemente a eine nichtnegative ganze Zahl $|a|$ so zuordnet, daß

1. $|a \cdot b| = |a| + |b|$;

2. $|a| = 0$ dann und nur dann, wenn a eine Einheit ist;

3. es zu je zwei Elementen a und b, von denen keines durch das andere teilbar ist, zwei weitere c und d gibt, so daß für $e = ac + bd$ der Betrag $|e| < \min(|a|, |b|)$ wird.

Das *Krull*sche Kriterium besagt:

Ein Integritätsbereich ist ZPE-Ring dann und nur dann, wenn es zu ihm eine „Betragsfunktion" $|a|$ mit den obigen Eigenschaften 1. und 2. gibt, die noch folgende Bedingung erfüllt: 3′) Zu je zwei Elementen a und b, von denen keines durch das andere teilbar ist, gibt es weitere zwei c und d, so daß eine Gleichung $eg = ac + bd$ mit $|e| < \min(|a|, |b|)$ und mit zu a und zu b primem g stattfindet.

Alle drei Kriterien werden vielfach verwendet.

---

[4] Siehe [4].

[5] Siehe [5].

[6] Siehe [6], [7], [8]. Das von *G. Kantz* in [9] und in „Archiv der Mathematik" Vol. VI (1955), fasc. 5, Seite 397—401: „Über Integritätsbereiche mit eindeutiger Primelementzerlegung" entwickelte ZPE-Kriterium ist mit dem *Krull*schen identisch.

Die Struktur eines ZPE-Ringes kann unter Umständen recht verwickelt sein. Angesichts der vielen voneinander verschiedenen Arten von solchen Ringen ist das nicht überraschend. In seiner Arbeit: „Über den Typus eines Zerlegungsringes[7]" versucht *G. Kantz* zwischen ZPE-Ringen und Hauptidealringen eine Brücke zu schlagen. Er beweist (S. 105) den Satz: „*Jeder Z-Ring, der eine algebraische Erweiterung eines H-Ringes ist, ist ein H-Ring*" („*Z*-Ring" steht für „*ZPE*-Ring", „*H*-Ring" für „Hauptidelring") und schließt daraus (S. 107 unten):

„Nach dem in § 3 bewiesenen ist ein *Z*-Ring, der nicht auch *H*-Ring ist, nur durch transzendente Erweiterung daraus hervorgegangen. Also gilt der Satz: *Der Typus eines ZPE-Ringes ist ein Hauptidealring oder eine ein- bzw. mehrfach transzendente Ringerweiterung eines solchen.*"

Dieser Schluß ist anfechtbar. Er könnte nur dann gelten, wenn sich jede Ringadjunktion so durchführen ließe, daß man zuerst rein algebraisch und anschließend nur noch rein transzendent erweitert. Einfache Beispiele vom Gegenteil:

Der Ring $K[x, \sqrt{1-x^3}]$ entsteht aus K durch eine transzendente und eine darauffolgende algebraische Ringadjunktion, bei der $\sqrt{1-x^3}$ der über $K[x]$ irreduziblen Gleichung $y^2 + x^3 - 1 = 0$ genügt. Er (sogar der Körper $K(x, \sqrt{1-x^3})$) kann aus K nicht durch eine einzige Adjunktion gewonnen werden, trotzdem er über K nur den Transzendenzgrad 1 hat[8]. Nun führt eine algebraische Adjunktion zu K innerhalb $K[x, \sqrt{1-x^3}]$ nicht aus K heraus: Jedes Element von $K[x, \sqrt{1-x^3}]$, das nicht schon in $K[x]$ liegt, hat die Form $\varrho = p(x) + q(x)\sqrt{1-x^3}$ mit Polynomen $p(x)$ und $q(x) \neq 0$ aus $K[x]$. Wäre ϱ algebraisch über K, also $P(\varrho) = P(p(x) + q(x)\sqrt{1-x^3}) = 0$ mit einem irreduziblen Polynom $P(z)$ aus $K[z]$, so hätte $\overline{P}(x, y) = P(p(x) + q(x)\, y)$ die Nullstelle $\sqrt{1-x^3}$, wäre daher durch $y^2 + x^3 - 1$ teilbar: $P(p(x) + q(x)\, y) = (y^2 + x^3 - 1)\, Q(x, y)$, und zwar mit ganzrationalem $Q(x, y)$. Setzt man darin $y = \dfrac{z - p(x)}{q(x)}$, so kommt

$$P(z) = \left(\frac{z^2 - 2\,p\,z + p^2}{q^2} + x^3 - 1\right) Q\left(x, \frac{z - p(x)}{q(x)}\right) =$$

$$= (z^2 - 2\,pz + p^2 + q^2(x^3 - 1))\, \frac{1}{q^2(x)}\, Q\left(x, \frac{z - p(x)}{q(x)}\right)$$

[7] Siehe [9].
[8] Siehe [10].

Da $q(x)$ zu $(z^2 - 2\,pz + p^2 + q^2(x^3 - 1))$ teilerfremd ist, ist

$$P(z) = (z^2 - 2\,p(x)\,z + p^2(x) + q^2(x)\,(x^3 - 1))\,\overline{Q}(x, y)$$

mit ganzem

$$\overline{Q}(x, y) = \frac{1}{q^2(x)}\,Q\left(x, \frac{z - p(x)}{q(x)}\right),$$

was unmöglich ist, da $P(z)$ von x nicht abhängt, während auf der rechten Seite x auf jeden Fall (wegen $q(x) \neq 0$ auch für $p(x) = 0$) vorkommt. Also ist jedes Element von $K[x, \sqrt{1-x^3}]$, das nicht in K liegt, transzendent über K.

Um also $K[x, \sqrt{1 - x^3}]$ aus K zu erhalten, muß man zuerst transzendent und dann, da dies nicht ausreicht, noch algebraisch erweitern.

Aber nicht nur der *Kantz*sche Beweis, der von ihm aufgestellte Satz selbst ist falsch. Es gilt nämlich der Satz:

Ein nullteilerfreier Stellenring R kann aus keinem seiner Unterringe durch eine rein transzendente Ringerweiterung gewonnen werden.

Beweis:

Sei $R = \overline{R}[z]$ mit einem Unterring $\overline{R}$ von R und über $\overline{R}$ transzendentem z. R enthält dann notwendig sämtliche Einheiten von R, denn eine Gleichung $a(z).b(z)=1$ ist wegen $1.1=1$ nur möglich, wenn beide Polynome $a(z)$ und $b(z)$ den Grad 0 haben. Ist nun a aus R eine Nichteinheit, so ist $1+a$ Einheit, sonst müßte $1=(1+a)-a$ als Differenz zweier Nichteinheiten des Stellenringes R ebenfalls Nichteinheit sein. Also ist mit $(1 + a) \in \overline{R}$ und $1 \in \overline{R}$ auch $a = (1 + a) - 1 \in \overline{R}$, d. h. $\overline{R}$ enthält überhaupt alle Elemente von R: $R=\overline{R}$ entgegen der Annahme $R = \overline{R}[z]$, w.z.b.w.

Nun gibt es unter den Stellenringen vielfach ZPE-Ringe, die nicht Hauptidealringe sind, z. B. Potenzreihenringe in mehreren Variablen, aber auch Ringe von dem eingangs unter Nr. 4 beschriebenen Typ: Man nehme dort etwa $n > 1$, $\mathfrak{p} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dann besteht R aus allen Brüchen $\dfrac{p(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{q(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ für die das konstante Glied des Nenners $q(x)$ nicht verschwindet. Man überzeugt sich sofort, daß $\mathfrak{p}$ kein Hauptideal in R ist.

Alle diese Ringe sind, wie soeben bewiesen, keine einfach, also auch keine mehrfach transzendenten Ringerweiterungen eines ihrer Unterringe, womit die Unhaltbarkeit des Struktursatzes von *Kantz* feststeht.

Ein lehrreicher Gegenbeweis stammt von *W. Gröbner*. Er beruht auf der eingangs unter Nr. 5 angeführten Tatsache. (Einige Hilfssätze,

die zum Verständnis der folgenden Umformungen vielleicht nützlich sind, sind am Schlusse dieser Arbeit zusammengestellt).

Sei $n \geqslant 4$, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ein irreduzibles singularitätenfreies Polynom. Nach *W. Gröbner* ist der Restklassenring $P = K[x_1, x_2, \ldots, \ldots, x_n] / f(x_1, \ldots, x_n)$ ein ZPE-Ring, und zwar im allgemeinen kein Hauptidealring. Bestünde der Struktursatz von *Kantz*, dann wäre $P = \overline{P}[z]$ transzendente Ringerweiterung eines seiner Unterringe $\overline{P} \subset P$. Daraus folgt für die Quotientenkörper $\frac{P}{P} \cong \frac{\overline{P}}{\overline{P}}(z)$, also hat $\frac{\overline{P}}{\overline{P}}$ den Transzendenz-n—2 über K, da ja n—1 derjenige $\frac{P}{P}$ ist:

$$\frac{\overline{P}}{\overline{P}} \cong K(z_1, z_2, \ldots, z_{n-2}, \zeta) \cong K(z_1, z_2, \ldots, z_{n-2})\,[z_{n-1}]/p(z_1, \ldots, z_{n-2}, z_{n-1})$$

mit Unbestimmten $z_1, \ldots, z_{n-2}, z_{n-1}$ und $p(z_1, \ldots, z_{n-2}, \zeta) = 0$. Dabei kann noch angenommen werden, daß das Primpolynom

$$p(z_1, \ldots, z_{n-2}, z_{n-1}) = z_{n-1}^{\varrho} + a_1(z_1, \ldots, z_{n-2})\, z_{n-1}^{\varrho-1} + \ldots + a_{\varrho}(z_1, \ldots, z_{n-2})$$

nicht nur in z_{n-1}, sondern auch in den übrigen Unbestimmten $z_1, \ldots, z_{n-2}$ ganz ist. Es kommt (siehe Hilfssatz 2)

$$\frac{P}{P} = \frac{\overline{P}}{\overline{P}}(z) \cong \{K(z_1, \ldots, z_{n-2})\,[z_{n-1}] \,/\, p(z_1, \ldots, z_{n-2}, z_{n-1})\}(z) \cong$$

$$\cong \left\{ \frac{K[z_1, \ldots, z_{n-2}]}{K[z_1, \ldots, z_{n-2}]}\,[z_{n-1}] \Big/ \; p(z_1, \ldots, z_{n-2}, z_{n-1}) \right\}(z) \cong$$

$$\cong \frac{K[z_1, \ldots, z_{n-2}, z_{n-1}, z] \,/\, p(z_1, \ldots, z_{n-2}, z_{n-1})}{K[z_1, \ldots, z_{n-2}, z_{n-1}, z] \,/\, p(z_1, \ldots, z_{n-2}, z_{n-1})}$$

Die Isomorphie der Quotientenkörper von $P = K[x_1, \ldots, x_n] / f(x_1, \ldots \ldots, x_n)$ und $K[z_1, \ldots, z_{n-2}, z_{n-1}, z] / p(z_1, \ldots, z_{n-2}, z_{n-1})$ bedeutet aber, daß die Ideale $(f(x_1, \ldots, x_n))$ und $(p(z_1, \ldots, z_{n-2}, z_{n-1}))$ aus $K[x_1, \ldots, x_n]$ bzw. $K[z_1, \ldots, z_{n-2}, z_{n-1}, z]$ birational äquivalent sind. Da $p(z_1, \ldots \ldots, z_{n-2}, z_{n-1})$ von z unabhängig ist, besagt dies, daß die Hyperfläche $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ dem (n—1)-dimensionalen Zylinder (Hyperkegel) $p(z_1, \ldots, z_{n-2}, z_{n-1}) = 0$ (z beliebig) im Raum der Koordinaten $z_1, \ldots \ldots, z_{n-2}, z_{n-1}, z$ birational äquivalent sein muß, was bei genügend allgemeiner Wahl des Polynoms $f(x_1, \ldots, x_n)$ absurd ist:

Der Restklassenring $K[x_1, \ldots, x_n] / f(x_1, \ldots, x_n)$ nach einem genügend allgemeinen singularitätenfreien Polynom kann aus keinem seiner Unterringe durch rein transzendente Ringerweiterung gewonnen werden.

Man bemerkt noch:

Dann und nur dann ist die Hyperfläche $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ *einem Hyperkeyel birational äquivalent, wenn sich der zugehörige Restklassenkörper als rein transzendente Erweiterung eines seiner Unterkörper darstellen läßt.*

Denn für ein Primideal $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(z_1, \ldots, z_{n-1}) \subset K[z_1, \ldots, z_{n-1}]$ gilt

$$\frac{K[z_1, \ldots, z_{n-1}, z]/\mathfrak{p}(z_1, \ldots, z_{n-1})}{K[z_1, \ldots, z_{n-1}, z]/\mathfrak{p}(z_1, \ldots, z_{n-1})} \simeq \frac{\{K[z_1, \ldots, z_{n-1}]/\mathfrak{p}(z_1, \ldots, z_{n-1})\}[z]}{\{K[z_1, \ldots, z_{n-1}]/\mathfrak{p}(z_1, \ldots, z_{n-1})\}[z]} \simeq$$

$$\simeq \frac{K[z_1, \ldots, z_{n-1}]/\mathfrak{p}(z_1, \ldots, z_{n-1})}{K[z_1, \ldots, z_{n-1}]/\mathfrak{p}(z_1, \ldots, z_{n-1})}(z)$$

(vgl. Hilfssatz 1).

Solche Gedankengänge führen zu einem allgemeinen Satz von *W. Gröbner*:

Wenn der Restklassenkörper eines d-dimensionalen Primideals $\mathfrak{p}_d$ *in* $K[x_1, \ldots, x_n]$ *einen Unterkörper vom Transzendenzgrad* $l < d$ *enthält, der nicht rational ist, so enthält die zu* $\mathfrak{p}_d$ *gehörige Mannigfaltigkeit* V_d *ein algebraisches System von Untermannigfaltigkeiten der Dimension* $d - l$, *das von keinem linearen System umfaßt wird, d. h.* V_d *ist irregulär in Bezug auf die Dimension* $d - l$.

Beweis:

Sei $P = \dfrac{K[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{p}_d}{K[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{p}_d}$ der Restklassenkörper zu $\mathfrak{p}_d$ vom Transzendenzgrad d, $Q \subset P$ ein Unterkörper von P vom Transzendenzgrad $0 < l < d$ über K, der nicht rational ist:

$$Q = K(x_1, \ldots, x_l, \eta) \cong K(x_1, \ldots, x_l)[y]/p(x_1, \ldots, x_l, y)$$

und

$$P = Q(x_{l+1}, \ldots, x_d, \zeta) \cong Q(x_{l+1}, \ldots, x_d)[z]/q(x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_d, \eta_l, z)$$

mit transzendenten Größen (Unbestimmten) $x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_d, y, z$ und algebraischen η_l, ζ. Von den über K bzw. Q primen Polynomen

$$p(x_1, \ldots, x_l, y) = y^\varrho + a_1(x_1, \ldots, x_l)\, y^{\varrho-1} + \ldots + a_\varrho(x_1, \ldots, x_l)$$

und

$$q(x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_d, y, z) =$$
$$= z^\sigma + b_1(x_1, \ldots, x_d, y)\, z^{\sigma-1} + \ldots + b_\sigma(x_1, \ldots, x_d, y)$$

kann noch angenommen werden, daß sie nicht nur in y bzw. z, sondern

auch in den übrigen Variablen ganz sind. Vermöge der Hilfssätze 1 und 2 findet man

$$Q \simeq \frac{K[x_1, \ldots, x_l]}{K[x_1, \ldots, x_l]}\,[y] \,/\, p(x_1, \ldots, x_l, y) \simeq \frac{K[x_1, \ldots, x_l, y] \,/\, p(x_1, \ldots, x_l, y)}{K[x_1, \ldots, x_l, y] \,/\, p(x_1, \ldots, x_l, y)}$$

und daraus

$$P \simeq \frac{K[x_1, \ldots, x_l, y] \,/\, p}{K[x_1, \ldots, x_l, y] \,/\, p}\,(x_{l+1}, \ldots, x_d)\,[z] \,/\, q(x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_d, y, z) \simeq$$

$$\simeq \frac{K[x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_d, y] \,/\, p}{K[x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_d, y] \,/\, p}\,[z] \,/\, q \simeq \frac{\{K[x_1, \ldots, x_d, y] \,/\, p\}[z] \,/\, q}{\{K[x_1, \ldots, x_d, y] \,/\, p\}[z] \,/\, q} \simeq$$

$$\simeq \frac{\{K[x_1, \ldots, x_d, y, z] \,/\, p\} \,/\, q}{\{K[x_1, \ldots, x_d, y, z] \,/\, p\} \,/\, q} \simeq \frac{K[x_1, \ldots, x_d, y, z] \,/\, (p, q)}{K[x_1, \ldots, x_d, y, z] \,/\, (p, q)}$$

Die Isomorphie der Quotientenkörper von $K[x_1, \ldots, x_n] \,/\, \mathfrak{p}_d$ und $K[x_1, \ldots, x_d, y, z] \,/\, (p, q)$ bedeutet die birationale Äquivalenz von $\mathfrak{p}_d$ mit dem Primideal $\mathfrak{q} = (p(x_1, \ldots, x_l, y), q(x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_d, y, z))$ aus $K[x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_d, y, z]$. (Daß $\mathfrak{q}$ prim, sogar teilerlos ist, erkennt man aus seiner Entstehungsart mit Hilfe der Substitution $y \to \eta$). Jede Nullstelle $(\xi_1, \ldots, \xi_l, \eta)$ von $(p) \subset K[x_1, \ldots, x_l, y]$ läßt sich zu einer Nullstelle $(\xi_1, \ldots, \xi_l, \xi_{l+1}, \ldots, \xi_d, \eta, \zeta)$ von $\mathfrak{q} = (p, q) \subset K[x_1, \ldots, x_d, y, z]$ so erweitern, daß man zunächst $\xi_{l+1}, \ldots, \xi_d$ willkürlich wählt und dann ζ aus der Gleichung $q(\xi_1, \ldots, \xi_l, \xi_{l+1}, \ldots \xi_d, \eta, z) = z^\sigma + b_1(\xi, \eta)\, z^{\sigma-1} + \ldots + b_\sigma(\xi, \eta) = 0$ bestimmt. Umgekehrt liefert jede Nullstelle $(\xi_1, \ldots, \xi_l, \xi_{l+1}, \ldots, \xi_d, \eta, \zeta)$ von $\mathfrak{q} = (p, q)$ genau eine solche $(\xi_1, \ldots, \xi_l, \eta)$ von (p), aus der jene wie eben beschrieben gewonnen werden kann.

Aus diesen Entwicklungen ist die Richtigkeit der Behauptung schon erkennbar. Eine eingehendere Untersuchung der hier herrschenden Verhältnisse, insbesondere der Beziehungen zu den Begriffsbildungen von *F. Severi*[9] sei einer kommenden Arbeit vorbehalten.

Hilfssätze

1.

Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal des Integritätsbereiches $\mathfrak{J}$, z eine Unbestimmte, so ist mit $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{J}[z]$

$$\{\mathfrak{J} \,/\, \mathfrak{p}\}\,[z] \simeq \mathfrak{J}[z] \,/\, \mathfrak{p}^*$$

(= $\mathfrak{J}[z] \,/\, \mathfrak{p}$, wenn statt $\mathfrak{p}^*$ wieder $\mathfrak{p}$ geschrieben wird).

[9] Siehe [11].

Beweis:

Für $p(z) = a_0 z^\varrho + a_1 z^{\varrho-1} + \ldots + a_\varrho \in \mathfrak{J}[z]$ ist dann und nur dann $p(z) \equiv 0\ (\mathfrak{p}^*)$, d. h. $p(z) = \lambda_1 \mu_1(z) + \lambda_2 \mu_2(z) + \ldots + \lambda_n \mu_n(z)$ mit $\lambda_i \equiv 0\ (\mathfrak{p})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, wenn $a_j \equiv 0\ (\mathfrak{p})$ für $j = 1, 2, \ldots, \varrho$ ist.

2.

Sei $K = \dfrac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}}$ *Quotientenkörper des Integritätsbereiches* $\mathfrak{J}$, y *eine Unbestimmte* (oder eine Reihe $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ von Unbestimmten), *das in* $K[y]$ *teilerlose Primideal* $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_y \subset \mathfrak{J}[y]$ *enthalte kein Element von* $\mathfrak{J}$. *Dann gilt*

$$K[y] / \mathfrak{p} \cong \frac{\mathfrak{J}[y] / \mathfrak{p}}{\mathfrak{J}[y] / \mathfrak{p}}$$

Beweis:

Für $p(y) \in \mathfrak{J}[y]$ folgt aus $p(y) \equiv 0\ (\mathfrak{p})$ über $K[y]$ $a \cdot p(y) \equiv 0\ (\mathfrak{p})$ in $\mathfrak{J}[y]$ mit einem $a \in \mathfrak{J}$, und daraus wegen $a \not\equiv 0\ (\mathfrak{p})$ $p(y) \equiv 0\ (\mathfrak{p})$ auch über $\mathfrak{J}[y]$ und umgekehrt. Somit ist (isomorph) $\mathfrak{J}[y] / \mathfrak{p} \subset K[y] / \mathfrak{p}$ und damit $\dfrac{\mathfrak{J}[y] / \mathfrak{p}}{\mathfrak{J}[y] / \mathfrak{p}} \subset K[y] / \mathfrak{p}$ da $K[y] / \mathfrak{p}$ Körper. Andererseits ist für jedes $q(y)$ aus $K[y]$ $q(y) = \dfrac{Q(y)}{a}$ mit einem $a \not\equiv 0\ (\mathfrak{p})$ aus $\mathfrak{J}$ und $Q(y) \in \mathfrak{J}[y]$, d. h. $K[y] / \mathfrak{p} \subset \dfrac{\mathfrak{J}[y] / \mathfrak{p}}{\mathfrak{J}[y] / \mathfrak{p}}$, also $K[y] / \mathfrak{p} = \dfrac{\mathfrak{J}[y] / \mathfrak{p}}{\mathfrak{J}[y] / \mathfrak{p}}$, w.z.b.w.

Daraus schließt man z. B.:

Ist z eine weitere Unbestimmte (oder Reihe $z = (z_1, z_2, \ldots, z_m)$ von Unbestimmten), dann ist

$$\{K[y] / \mathfrak{p}\}(z) \simeq \frac{\mathfrak{J}[y] / \mathfrak{p}}{\mathfrak{J}[y] / \mathfrak{p}}(z) \cong \frac{\{\mathfrak{J}[y] / \mathfrak{p}\}[z]}{\{\mathfrak{J}[y] / \mathfrak{p}\}[z]}$$

(für $K = \dfrac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}}$ ist $K(z) = \dfrac{\mathfrak{J}[z]}{\mathfrak{J}[z]}$), also $\cong \dfrac{\mathfrak{J}[y, z] / \mathfrak{p}}{\mathfrak{J}[y, z] / \mathfrak{p}}$ (nach Hilfssatz 1).

Ist auch $K(z)[y] / \mathfrak{p}$ ein Körper, dann ist

$$K(z)[y] / \mathfrak{p} = \frac{\mathfrak{J}[z]}{\mathfrak{J}[z]}[y] / \mathfrak{p} \cong \frac{\mathfrak{J}[z, y] / \mathfrak{p}}{\mathfrak{J}[z, y] / \mathfrak{p}}$$

weil $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{J}[z]$ kein Element von $\mathfrak{J}[z]$ enthält (sonst enthielte nach

geeigneter Spezialisierung von z auch $\mathfrak{p}$ ein Element von $\mathfrak{J}$). Zusammenfassend ist

$$\{K[y] / \mathfrak{p}\}(z) \cong \frac{\mathfrak{J}[y, z] / \mathfrak{p}}{\mathfrak{J}[y, z] / \mathfrak{p}} \; (\cong K(z)[y] / \mathfrak{p})$$

Literatur

[1] *F. Klein*: Werke Bd. I, Seite 153: „Über einen liniengeometrisegen Satz" (Math. Ann., **22** (1884)).

[2] *F. Severi*: Memorie scelte, Vol. I, 397—404.

[3] *M. Noether*: „Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumkurven", Abh. Akad. Berlin 1882.

[4] *W. Gröbner*: „Sopra un teorema di Severi" Rendiconti di Matematica Università di Roma, Serie V, **9** (1952), 217—223.

[5] *H. Hasse*: „Über die Zerlegung in Primelemente oder Primhauptideale in Integritätsbereichen" Journal f. Math. **159** (1928), 3—12.

[6] *W. Krull*: „Über die Zerlegung der Hauptideale in allgemeinen Ringen", Math. Ann. **105** (1931), 1—14.

[7] *W. Krull*: „Idealtheorie" (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. 4. Verlag Springer, Berlin 1935), S. 107.

[8] *W. Krull*: Enzyklopädie d. math. Wiss., Bd. I 1, Heft 5 (1939), Art. 11: „Allgemeine Modul-, Ring- und Idealtheorie", Seite 28, Fußnote.

[9] *G. Kantz*: „Über den Typus eines Zerlegungsringes" Monatsh. f. Math. **59** (1955), 104—109.

[10] *W. Gröbner*: „Moderne algebraische Geometrie" (Springer-Verlag, Wien 1949), S. 33, Nr. **116**. 21.

[11] *F. Severi*: „Les irregularités d'une variété algébrique et leurs liens avec les formes de première espèce". Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **242** (1956), 225—227.

Über Schwingungen mit periodischer Störung und Lösung

Von

Hans Hornich, Graz

(Eingelangt am 21. März 1956)

In dieser Arbeit soll die Frage nach den periodischen Lösungen der Differentialgleichung der homogenen unendlichen schwingenden Saite

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = Q(x, y) \tag{1}$$

mit einer in x und y periodischen Störungsfunktion Q, bzw. der schwächeren Differentialgleichung (4) behandelt werden; dabei ist wesentlich das Verhältnis λ der Perioden von Q in x und y: während in dem einen „seltenen" Fall, in dem die Kettenbruchentwicklung von λ beschränkte Teilnehmer aufweist, also λ sich schlecht durch rationale Zahlen approximieren läßt, die periodische Lösung sich sofort hinschreiben läßt, ist im andern Fall — abgesehen von den rationalen λ — wegen der dabei notwendigen konvergenzerzeugenden Glieder die Lösung schwieriger und führt über eine Reihe, die u. U. nur für eine Menge vom Maße Null konvergiert und die eventuell vorhandene Lösung bestimmt.[1]

Wir beschränken uns auf die folgenden in x und y periodischen Störungsfunktionen der Art:

$$Q(x, y) = \sum_{n, m \geq 0} a_{nm} \cos (n x + m \lambda y), \tag{2}$$

wobei $a_{00} = 0$ und

$$\Sigma \mid a_{n m} \mid < + \infty \tag{3}$$

sei.

---

[1] Zur Fragestellung vgl. *E. Borel*, C. R. Paris 121, S. 933—935. — Für die auch hier auftretende Erscheinung der „small divisors" *A. Wintner*, The Analytical Foundations of Celestial Mechanics, Princeton, S. 406 ff. und 442—443 mit Literaturangaben, sowie Proc. Nat. Acad. Sc. 27, S. 311—314. Die Hinweise verdanke ich einer freundlichen Mitteilung von Herrn *A. Wintner*.

Wir ersetzen (1) unter Verwendung von

$$2\sigma = x - y \qquad 2\tau = x + y$$

durch die schwächere Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\sigma\,\partial\tau} = \Sigma a_{n\,m} \cos\left[\tau(n + \lambda m) + \sigma(n - \lambda m)\right] \tag{4}$$

Wir haben dann folgende Fallunterscheidungen:

Sei für alle Paare ganzer Zahlen $m \geq 0$, $n \geq 0$

$$\underline{\lim}\ |\lambda^2 m^2 - n^2| > 0.$$

Es ist dies äquivalent mit der Bedingung

$$\underline{\lim}\ m^2 \left|\lambda - \frac{n}{m}\right| > 0,$$

d. h. es gibt ein $c > 0$, so daß für alle rationalen Zahlen n/m gilt

$$\left|\lambda - \frac{n}{m}\right| > \frac{1}{c\,m^2},$$

dies ist genau dann der Fall, wenn λ irrational ist und die Kettenbruchentwicklung von λ beschränkte Teilnenner aufweist[2]. Die Menge aller dieser Zahlen λ ist übrigens vom Maß Null[3]. Wir können dann ansetzen: (es sei $u(x, y) = u_1(\sigma, \tau)$)

$$u_1 = \Sigma \frac{a_{n\,m}}{\lambda^2 m^2 - n^2} \cos\left[\tau(n + m\lambda) + \sigma(n - m\lambda)\right]; \tag{5}$$

denn es ist

$$\frac{\partial u_1}{\partial\sigma} = \Sigma \frac{a_{n\,m}}{\lambda m + n} \sin\left[\tau(n + m\lambda) + \sigma(n - m\lambda)\right], \tag{6}$$

während $\dfrac{\partial u_1}{\partial\tau}$ nicht zu existieren braucht[4], und schließlich ist (4), wobei alle vorkommenden Reihen absolut und gleichmäßig konvergieren.

---

[2] Vgl. etwa *Koksma*, Diophantische Approximationen, S. 29.

[3] Vgl. *Koksma* l. c. S. 47.

[4] Es müßte ja sonst die Quadratsumme der Fourierkoeffizienten von $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, also $\Sigma \left|\dfrac{a_{n\,m}}{\lambda^2 m^2 - n^2}\right|^2 (n^2 + m^2)$ konvergieren, was i. a. nicht der Fall ist; es ist daher auch die Differentialgleichung (1) dann nicht lösbar.

Wenn die Kettenbruchentwicklung von λ nur beschränkte Teilnenner hat, ist eine in x und y periodische Lösung von (4) *durch* (5) *gegeben.*

Sei nun λ rational $= \frac{p}{q}$, also auch $\underline{\lim} \mid \lambda^2 m^2 - n^2 \mid = 0$. Setzen wir hier etwa

$$Q = \cos(p x + q \lambda y) = \cos(2 q \lambda \tau), \tag{7}$$

so hat (4) keine Lösung, die in x und y periodisch wäre mit denselben Perioden wie Q; es ist nämlich, um auch diesen einfachen Fall der Vollständigkeit halber zu erledigen:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \sigma \, \partial \tau} = \cos(2 q \lambda \tau),$$

also

$$\frac{\partial u_1}{\partial \sigma} = \frac{1}{2 q \lambda} \sin(2 q \lambda \tau) + f(\sigma), \tag{8}$$

wo f eine stetige Funktion ist. Beim Übergang $y \to y + \frac{2\pi}{\lambda}$ bzw.

$$\sigma \to \sigma - \frac{\pi}{\lambda}, \quad \tau \to \tau + \frac{\pi}{\lambda}$$

ist daher, wenn u und damit $\frac{\partial u_1}{\partial \sigma}$ in y periodisch sein soll,

$$f(\sigma) = f(\sigma - \frac{\pi}{\lambda}) \text{ und } \int f(\sigma) \, d\sigma = F(\sigma) + c \sigma$$

wo $F(\sigma) = F(\sigma - \frac{\pi}{\lambda})$ periodisch und c eine Konstante ist. Nun ist aber

$$u_1 = \frac{\sigma}{2 q \lambda} \sin(2 q \lambda \tau) + F(\sigma) + c \sigma + g(\tau) \tag{9}$$

also bei festgehaltenem τ, so daß $\sin(2 q \lambda \tau) \neq 2 q \lambda c$, die rechte Seite als Funktion von σ allein unbeschränkt, während u periodisch in x und y, also beschränkt ist.

Bei rationalem λ gibt es also stets Fälle, in denen keine Lösung existiert, die periodisch in x und y mit denselben Perioden wie Q wäre.

Sei nunmehr

$$\underline{\lim} \mid \lambda^2 m^2 - n^2 \mid = 0$$

aber λ irrational. Die Kettenbruchentwicklung von λ hat dann beliebig große Teilnenner. Dies ist also für fast alle λ der Fall.

Wir können (4) nach τ integrieren:

$$\frac{\partial u_1}{\partial \sigma} = \Sigma \frac{a_{n\,m}}{\lambda m + n} \sin [\tau(n + \lambda m) + \sigma(n - \lambda m)] + h(\sigma) \tag{10}$$

wobei die Reihe absolut und gleichmäßig konvergiert und h eine stetige Funktion ist. Soll u wieder wie Q periodisch in x und y sein, so ist auch $\frac{\partial u_1}{\partial \sigma}$ periodisch und es gilt:

$$h(\sigma) = h(\sigma + \pi) = h(\sigma - \frac{\pi}{\lambda}),$$

was wegen der Irrationalität von λ weiter

$$h(\sigma) = c \tag{11}$$

konstant ergibt. Nun ist mit $u\ (x, y)$ auch $u(-x, -y)$ periodisch mit den Perioden 2π und $\frac{2\pi}{\lambda}$, also auch

$$\bar{u}(x, y) = u(x, y) - u(-x, -y)$$

und es ist

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \sigma} = \frac{\partial [u(x, y) - u(-x, -y)]}{\partial \sigma} = 2c$$

$$\bar{u} = 2c\sigma + \varphi(\tau)$$

und wegen der Beschränktheit von u schließlich

$$c = 0. \tag{12}$$

Integration von (10) nach σ von 0 bis σ liefert weiter:

$$u_1(\sigma, \tau) - u_1(0, \tau) = \Sigma \frac{a_{n\,m}}{\lambda^2 m^2 - n^2} \{\cos [\tau(n + m\lambda) + \sigma(n - m\lambda)] - \cos [\tau(n + m\lambda)]\} + \int_0^\sigma h(\sigma)\, d\sigma \tag{13}$$

wo die Reihe wieder absolut konvergiert.

Fragen wir wieder nach den in x und y periodischen Lösungen, so ist $h(\sigma) = 0$ und mit ganzzahligen n', m':

$$u_1(\sigma + \pi n' - \frac{\pi m'}{\lambda}, \tau + \pi n' + \frac{\pi m'}{\lambda}) = u_1(\sigma, \tau) \tag{14}$$

und nach Subtraktion

$$-u_1(0, \tau + \pi n' + \frac{\pi m'}{\lambda}) + u_1(0, \tau) =$$

$$= \Sigma \frac{a_{n\,m}}{\lambda^2 m^2 - n^2} \left\{ -\cos\left[(\tau + \pi n' + \frac{\pi m'}{\lambda})(n + m\lambda) + \cos\left[\tau(n + m\lambda)\right]\right] \right\} \quad (15)$$

Setzt man endlich $\tau = 0$, so wird

$$u_1(0, \pi n' + \frac{\pi m'}{\lambda}) - u_1(0, 0) =$$

$$= \Sigma \frac{a_{n\,m}}{\lambda^2 m^2 - n^2} \left\{ \cos\left[(\pi n' + \frac{\pi m'}{\lambda})(n + m\lambda)\right] - 1 \right\} \quad (16)$$

Nach ihrer Herleitung konvergiert die Reihe in (16) stets, wie man auch direkt zeigen kann.

Damit sind die Werte von $u_1(0, \tau)$ für $\tau = \pi n' + \frac{\pi m'}{\lambda}$ bis auf das willkürlich wählbare $u_1(0, 0)$, also auf einer in der Zahlgerade dicht liegenden Menge festgelegt. Es wäre vielleicht naheliegend zu vermuten, daß die Darstellung

$$u_1(0, \tau) - u_1(0, 0) = \Sigma \frac{a_{n\,m}}{\lambda^2 m^2 - n^2} \left[\cos\left[\tau(m\lambda + n)\right] - 1\right] \quad (17)$$

für alle Werte τ gültig ist. Indes ist hier eine weitere Fallunterscheidung notwendig.

Wenn

$$\Sigma \left| \frac{a_{n\,m}}{\lambda^2 m^2 - n^2} \right| < +\infty \quad (18)$$

konvergiert, so ist die Reihe in (17) *absolut und gleichmäßig konvergent, liefert daher eine stetige, nicht notwendig differenzierbare Funktion* $u_1(0, \tau)$ *und weiter nach* (11) (12) (13) *eine in x und y periodische Lösung von* (4), *die nach der Herleitung bis auf die willkürliche Konstante* $u_1(0, 0)$ *auch die einzige ist.*

$u_1(0, \tau)$ ist also eine fastpersodische Funktion.

Sei nun

$$\Sigma \left| \frac{a_{n\,m}}{\lambda^2 m^2 - n^2} \right| = +\infty \quad (19)$$

divergent. Wir greifen eine Folge von Zahlenpaaren (n_r, m_r), $r = 1, 2, \ldots$ heraus, so daß auch

$$\Sigma \left| \frac{a_{n_r m_r}}{\lambda^2 m_r^2 - n_r^2} \right| = +\infty \tag{20}$$

divergiert, wobei wir die Glieder dieser Reihe monoton (zunehmend oder abnehmend) angeordnet denken. Wir können weiter hiebei annehmen, daß die Zahlenfolge

$$\lambda^2 m_r^2 - n_r^2 = \varepsilon_r \to 0 \tag{21}$$

strebt: wäre das nicht der Fall, so sammeln wir alle Glieder

$\frac{a_{n_r m_r}}{\lambda^2 m_r^2 - n_r^2}$ für die $|\lambda^2 n_r^2 - n_r^2| \geq 1$, bzw.

$$\frac{1}{k} > |\lambda^2 m_r^2 - n_r^2| \geq \frac{1}{k+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots);$$

dann ist wegen (3) für jedes k die Summe S_k aller dieser Glieder $\left| \frac{a_{n_r m_r}}{\lambda^2 m_r^2 - n_r^2} \right|$ konvergent; dann nehmen wir für jedes k nur endlichviele Glieder so, daß deren Summe $\geq \frac{1}{2} S_k$ und denken uns die restlichen Glieder gestrichen. Die Summe aller übriggebliebenen Glieder in $\Sigma \left| \frac{a_{n_r m_r}}{\lambda^2 m_r^2 - n_r^2} \right|$ ist dann $\geq \frac{1}{2} \Sigma S_k$, also wieder divergent, die Reihe ist monoton und es ist

$$\lambda^2 m_r^2 - n_r^2 = \varepsilon_r \to 0.$$

Ferner ist

$$n_r + \lambda m_r = 2 n_r + \frac{\varepsilon_r}{\lambda m_r + n_r}.$$

Nach einem Satz von *Hardy-Littlewood*[5] ist für fast alle $\bar{\tau} = \frac{\tau}{\pi}$ (d. h. für alle $\bar{\tau}$ bis auf eine Menge vom Maß Null) die Menge der Zahlen $n_r \bar{\tau}$ mod. 1 dicht im Intervall (01). Weiter sind für fast alle $\bar{\tau}$ die Zahlen $n_r \bar{\tau}$ nach der Weylschen Verallgemeinerung[6] sogar gleichverteilt mod. 1 im Intervall (01) und es gilt für die Anzahl $r(N)$ derjenigen r mit $r < N$, für welche mit einem $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ gilt

$$\varepsilon < n_r \bar{\tau} - [n_r \bar{\tau}] \leq 1 - \varepsilon \tag{22}$$

[5] Acta math. 37 (1914), 155—191.
[6] Math. Ann. 77 (1916), 313—352.

die Limesbezeichnung

$$\frac{r(N)}{N} \to 1 - 2\varepsilon \text{ für } N \to \infty. \tag{23}$$

Für alle diese r ist also

$$\overline{\lim} \cos[\tau(n_r + \lambda m_r)] = \overline{\lim} \cos\left[\pi\tau\left(2n_r + \frac{\varepsilon_r}{\lambda m_r + n_r}\right)\right] \leq \cos(2\pi\varepsilon) \tag{24}$$

also

$$\underline{\lim}\{1 - \cos[\tau(n_r + \lambda m_r)]\} \geq 1 - \cos(2\pi\varepsilon) > 0. \tag{25}$$

Nun ist aber auch für diese Teilreihe der r mit (22) die Reihe

$$\Sigma' \left| \frac{a_{n_r m_r}}{\lambda^2 m_r^2 - n_r^2} \right| = +\infty \tag{26}$$

divergent; denn aus der Reihe (20) haben wir, wenn etwa $\varepsilon < {}^1/_4$ ist, wegen (23) für hinreichend große N höchstens $N/2$ aus den ersten N Gliedern von (20) wegzulassen, um die Reihe (26) zu erhalten. Wegen der Monotonie der Reihe (20) divergiert aber dann auch die Reihe (26).

Wegen (26) ist daher schon für diese Teilfolge der r die Reihe

$$\Sigma' \frac{a_{n_r m_r}}{\lambda^2 m_r^2 - n_r^2} \{\cos[\tau(m_r \lambda + n_r)] - 1\}$$

absolut divergent.

Wenn

$$\Sigma \left| \frac{a_{n m}}{\lambda^2 m^2 - n^2} \right| = +\infty$$

divergiert, so ist bis auf eine Menge vom Maß Null (die alle Punkte der Art $\pi n' + \frac{\pi m'}{\lambda}$ *enthalten muß), die Reihe*

$$\Sigma \frac{a_{n m}}{\lambda^2 m^2 - n^2} \{\cos[\tau(n + \lambda m)] - 1\} \tag{27}$$

überall absolut divergent.

Wählt man die $a_{n m}$ etwa so, daß

$$\operatorname{sgn} a_{n m} = \operatorname{sgn}(\lambda^2 m^2 - n^2),$$

so ist die Reihe (27) fast überall sogar eigentlich divergent. Sonst läßt sich natürlich über die Konvergenz der Reihe (27) nichts aussagen.

Eine stetige periodische Lösung von (4) *ist im Fall* (19) *nur dann möglich, wenn die aus* (16) *sich ergebenden Werte* $u_1(0, \tau)$ *für* $\tau = \pi n' + \frac{\pi m'}{\lambda}$ *gleichmäßig stetig sind und sich daher zu einer stetigen Funktion* $u_1(0, \tau)$ *ergänzen lassen.*

Konstruktive Durchführung der durch die Sehnen einer Raumkurve 3. Ordnung vermittelten Abbildung des Raumes auf eine Ebene

Von

H. Brauner, Wien

Mit 5 Textabbildungen

(Eingelangt am 22. März 1956)

Die Sehnen einer Raumkurve 3. Ordnung, die bekanntlich eine Strahlkongruenz vom Bündelgrad 1 und Feldgrad 3 bilden, können für gewisse Zwecke als Projektions- oder Sehstrahlen einer eindeutigen Abbildung des projektiven Punktraumes auf die Punkte einer Bildebene verwendet werden. Die allgemeinen Gesetze dieser „*Sehnenprojektion*" wurden in einer vorhergehenden Arbeit dargelegt[1].

Die vorliegende Mitteilung ist der zeichnerischen Durchbildung dieses Abbildungsverfahrens gewidmet, wobei durch eine metrisch spezielle Annahme konstruktiv bequeme und übersichtliche Verhältnisse geschaffen wurden. Als „*Zentralkubik*" der Abbildung wurde ein spezieller *aufrechter kubischer Kreis* gewählt, als Bildebene die zu seiner (reellen) Asymptote normale Ebene durch seinen Scheitel. Unter dieser Annahme können konstruktiv einfache Methoden angegeben werden, um Punkte, Geraden und Ebenen abzubilden und umgekehrt aus den Bildelementen die Raumgebilde zu rekonstruieren. Als Anwendung wird u. a. die Abbildung eines linearen Strahlkomplexes mit Hilfe der Sehnen einer im Komplex enthaltenen Zentralkubik behandelt.

1. Die Sehnenkongruenz eines aufrechten kubischen Kreises

Gestützt auf ein kartesisches Normalkoordinatensystem x, y, z wählen wir als *Zentralkubik* c der Abbildung den mittels eines Parameters φ durch

[1] *H. Brauner*, Über die Projektion mittels der Sehnen einer Raumkurve 3. Ordnung. Mh. Math. 59 (1955), 258—273.

$$x = \sin\varphi\cos\varphi,\ y = \sin^2\varphi,\ z = \operatorname{tg}\varphi \tag{1}$$

beschriebenen aufrechten kubischen Kreis. Derselbe verläuft auf dem *Drehzylinder* $\mathfrak{Z}$

$$x^2 + y^2 - y = 0 \tag{2}$$

und geht bei dessen Verebnung in eine Tangenslinie über, was eine gute anschauliche Vorstellung vom Aussehen gibt. Weitere einfache Flächen, die c enthalten, sind der *orthogonale Kegel* 2. Grades $\mathfrak{K}$

$$x^2 + y^2 - x\,z = 0 \tag{3}$$

und das *gleichseitige hyperbolische Paraboloid* $\mathfrak{P}$

$$y\,z + x - z = 0. \tag{4}$$

Der vollständige Schnitt von $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{K}$ besteht aus c und der z-Achse, jener von $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{P}$ aus c und der der z-Achse gegenüberliegenden Zylindererzeugenden $u(x = 0,\ y = 1)$, welche die reelle Asymptote von c abgibt; der Schnitt von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{P}$ schließlich besteht aus c und jener Kegelerzeugenden $o(x : y : z = 1 : 0 : 1)$, welche die Tangente im Scheitel $O(0, 0, 0)$ der Kubik darstellt. — Die Zentralkubik c ist mithin als Teilschnitt von irgend zwei der Flächen $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{P}$ konstruktiv bequem erfaßbar. Ihre Fernpunkte sind der Fernpunkt U der z-Achse und die absoluten Punkte I, J der xy-Ebene.

Die Sehnen einer Raumkurve 3. Ordnung werden bekanntlich aus zwei beliebigen Kurvenpunkten durch *kollineare Ebenenbündel* projiziert. Wählen wir im vorliegenden Fall als Bündelzentren insbesondere den Scheitel O und den reellen Fernpunkt U der Zentralkubik und schneiden wir die zugehörigen Ebenenbündel mit einer Ebene $z{=}konst$ $(\neq 0)$, so erhalten wir in derselben zwei kollineare Strahlfelder, für welche die absoluten Punkte I und J Festpunkte abgeben. Die betreffende Kollineation ist demnach eine gewisse *Drehstreckung*, deren Drehwinkel durch Betrachtung einer speziellen Sehne (etwa der Tangente in O oder U) sofort als *rechter* zu erkennen ist. Hieraus folgt, daß die Sehnen der Zentralkubik aus dem Scheitel und dem reellen Fernpunkt durch zueinander *normale Ebenen* projiziert werden.

Auf Grund dieser Tatsache ist der Spurpunkt jeder Sehne der Zentralkubik in der xy-Ebene — die im folgenden als Bildebene dienen wird — der Fußpunkt des aus dem Ursprung O auf die Sehne gefällten Lotes.

2. Sehnenprojektion

Im folgenden werden nun die ∞^2 Sehnen der Zentralkubik c als „*Sehstrahlen*" aufgefaßt. Als *Bildebene* π soll die xy-Ebene dienen. Die dadurch vermittelte Abbildung des Punktraumes, kurz „*Sehnenprojektion*" genannt, wird in Anlehnung an den gewöhnlichen Projektionsvorgang wie folgt erklärt: Durch einen „Dingpunkt" P im Raum geht i. a. genau eine Sehne s von c; ihr i. a. eindeutig bestimmter Schnittpunkt P^s mit der Bildebene π soll das „*Sehnenbild*" von P heißen.

Die *Ausnahmstellen* dieses Abbildungsverfahrens sind leicht zu überblicken: Liegt der Dingpunkt auf der Zentralkubik selbst — ein solcher Punkt soll in Hinkunft kurz „Zentralpunkt" genannt werden —, so gehen durch ihn ∞^1 Sehnen, die einen (orthogonalen) Kreiskegel bilden; der Bildpunkt wird daher unbestimmt auf dem Spurkreis des

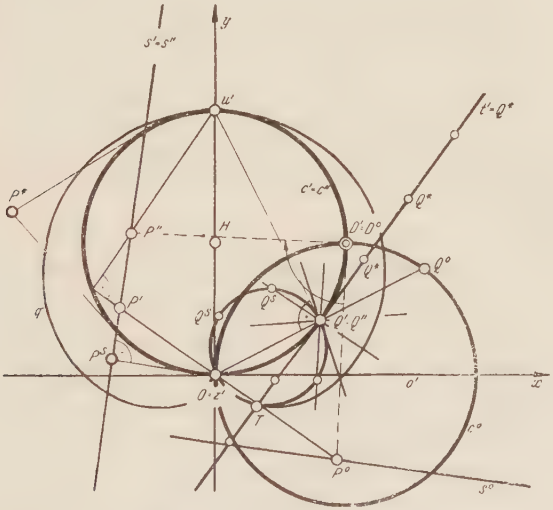

Abb. 1. Sehnenbild und Reyebild eines Punktes

Kegels. Liegt der Dingpunkt hingegen auf einer Seite des Dreiecks $O\,I\,J$, so verläuft der mit der betreffenden Seite zusammenfallende Sehstrahl zur Gänze in der Bildebene und jeder seiner Punkte könnte als Bildpunkt gelten.

Zur *zeichnerischen Durchführung* dieser Abbildung bedarf es eines geeigneten darstellend-geometrischen Konzepts. Wir legen jeden Raumpunkt P durch seine Normalprojektion P' auf die Bildebene π

(„*Grundriß*") und durch den Grundriß P^0 seines Zentralrisses aus dem Auge O auf die Ebene $z = 1$, kurz „*Zentralgrundriß*" genannt[2], fest. Die Rißpaare P', P^0 dieses speziellen Zweibildersystems sind an Strahlen des Ordnerbüschels O gebunden.

Der Grundriß c' der Zentralkubik c deckt sich mit dem Basiskreis (2) des Drehzylinders $\mathfrak{Z}$ und möge in Hinkunft kurz „*Zentralkreis*" genannt werden, der Zentralgrundriß c^0 von c geht aus c' durch negative Viertelschwenkung um O hervor und schneidet c' außer in O noch in einem Punkt $D' = D^0$ (Abb. 1), dem Bild des in der Ebene $z = 1$ liegenden Zentralpunktes D.

Wir denken uns nun das Feld der Zentralgrundrisse P^0 einer negativen Viertelschwenkung um D' unterworfen und bezeichnen den aus P^0 dabei entstehenden Punkt P'' als „*Zentraldrehriß*" von P. In diesem neuen Zweibildersystem sind zusammengehörige Bildpunkte P', P'' an zueinander normale Strahlen durch O bzw. u' gebunden[3]. Da zufolge der Viertelschwenkung die Bildkreise c' und c'' der Zentralkubik zusammenfallen, so liegen die Rißpaare Q', Q'' der Zentralpunkte Q vereinigt und die Kubik c ist als die „*Koinzidenzkurve*" des Zweibildersystems $\{P', P''\}$ zu erkennen[4]. Die Sehnen s der Kubik c besitzen daher — als Verbindungsgeraden zweier Koinzidenzpunkte — zusammenfallende Bildpaare $s' = s''$.

Die Schnittpunkte von c' mit s' sind die Grundrisse der „Sehnenendpunkte", die jedoch nicht benötigt werden. Diese Punkte brauchen im übrigen für reelle Sehnen s nicht notwendig reell getrennt sein, sondern können auch zusammenrücken oder konjugiert-komplex ausfallen. Der Sehnenprojektion liegt also, was grundsätzlich zu beachten ist, nicht der enge elementare Sehnenbegriff zugrunde, sondern der weitere der algebraischen Geometrie.

Ist nun ein Punkt P durch sein Rißpaar P', P'' gegeben, so ist das Bildpaar $s' = s''$ der durch ihn gehenden Sehne s von c die Verbindungsgerade $P'\,P''$. Das Sehnenbild P^s von P ergibt sich anschließend (als Bildspurpunkt von s) im Fußpunkt des aus O auf s' gefällten Lotes (Abb. 1).

---

[2] In der Perspektive wird üblicherweise — im Gegensatz zur hier eingeführten Bezeichnung — unter „*Zentralgrundriß*" das Zentralbild eines Grundrisses verstanden.

[3] P'' ist übrigens der Zentralgrundriß jenes Strahles durch O, der in der Kollineation zwischen den Bündeln O und U der Geraden $U\,P$ entspricht.

[4] *E. Müller-E. Kruppa*, Vorlesungen über Darstellende Geometrie I (Wien 1923), 136.

Aus der Konstruktion des Sehnenbildes P^s kann man auch die *Abbildungsgleichungen* der Sehnenprojektion herleiten. Zu einem Raumpunkt $P(x, y, z)$ gehört — unter Verwendung homogener Koordinaten $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = x : y : 1$ in der Bildebene — der Grundriß $P'(x : y : 1)$ und der Zentralgrundriß $P^0(x : y : z)$, aus welchem durch die Viertelschwenkung

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 \to \xi_2 : (\xi_3 - \xi_1) : \xi_3 \tag{5}$$

der Zentraldrehriß $P''(y : (z-x) : z)$ hervorgeht. Hieraus folgt als Gleichung für den Sehnengrundriß $s' = P'\,P''$:

$$(y\,z + x - z)\,\xi_1 - (x\,z - y)\,\xi_2 - (x^2 + y^2 - x\,z)\,\xi_3 = 0. \tag{6}$$

Im Schnitt dieser Geraden mit ihrem Ursprungslot

$$(x\,z - y)\,\xi_1 + (y\,z + x - z)\,\xi_2 = 0$$

ergibt sich schließlich das Sehnenbild P^s

$$\begin{aligned} \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \; & (y\,z + x - z)\,.\,(x^2 + y^2 - x\,z) \; : \\ & : (y - x\,z)\,.\,(x^2 + y^2 - x\,z) \quad\; : \\ & : [(y - x\,z)^2 + (y\,z + x - z)^2] \quad . \end{aligned} \tag{7}$$

Es handelt sich mithin bei der Sehnenprojektion um eine *Abbildung 4. Ordnung.*

3. Reyesche Abbildung

Betrachtet man die Koeffizienten der Gleichung (6)

$$\eta_1 = -y\,z - x + z,\;\; \eta_2 = x\,z - y,\;\; \eta_3 = x^2 + y^2 - x\,z, \tag{8}$$

so stellt man fest, daß die Zuordnung zwischen den Raumpunkten P und den zugehörigen Sehnengrundrissen s' bloß von 2. Ordnung, also einfacher als die eigentliche Sehnenprojektion $P \to P^s$ ist. Es liegt somit nahe — um eine punkttreue Abbildung zu haben —, auf das Strahlfeld $\{s'\}$ noch die Polarität am Zentralkreis c' auszuüben, die durch

$$\xi_1^* : \xi_2^* : \xi_3^* = -\eta_1 : 2\,\eta_3 : 2(\eta_2 + 2\,\eta_3) \tag{9}$$

beschrieben wird. Auf diese Weise ordnen wir jedem Dingpunkt $P(x, y, z)$ einen neuen Bildpunkt P^* mit den homogenen Koordinaten

$$\xi_1^* : \xi_2^* : \xi_3^* = (yz + x - z) : 2(x^2 + y^2 - xz) : 2(2\,x^2 + 2\,y^2 - xz - y) \tag{10}$$

zu. Diese *quadratische Abbildung* $P \to P^*$ soll im folgenden nach *Th. Reye*

benannt werden, der eine Abbildung dieser Art in seiner Theorie der „konjugierten Sehnen" einer Kubik herangezogen hat. Die dazu duale Abbildung $P \to P'\ P''$ findet sich im Zusammenhang mit dem Koinzidenzgebilde des allgemeinsten Zweibildersystems bei *E. Müller — E. Kruppa*[5].

Der *Übergang* $P^* \to P^s$ vom Reyeschen Bildfeld zum Sehnenbild vollzieht sich gemäß Abb. 1 durch die aus der Polarität am Zentralkreis und der Fußpunktverwandtschaft bezüglich des Ursprungs O zusammengesetzte *quadratische Transformation* $\mathfrak{T}$

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = 2\,\xi_1^*\,\xi_2^* : \xi_2^*(2\,\xi_2^* - \xi_3^*) : [4\,\xi_1^{*2} + (2\,\xi_2^* - \xi_3^*)^2]. \quad (11)$$

Ausnahmstellen der Reyeschen Abbildung sind nur mehr die Punkte der Zentralkubik c. Für einen solchen „Zentralpunkt" Q erfüllen die Sehnengrundrisse s' das Strahlbüschel Q', das Reyebild Q^* wird mithin unbestimmt auf der *Tangente* t' von c' in Q' (Abb. 1). Die möglichen Sehnenbilder Q^s hingegen erfüllen den Fußpunktort des Strahlbüschels Q', also den *Kreis* über dem Durchmesser $O\,Q'$. Dem Zentralkreis als Hüllgebilde der Geraden t' entspricht vermöge der Transformation $\mathfrak{T}$ seine Fußpunktkurve in bezug auf O, also eine gewisse *Kardioide* q, als Hüllgebilde der genannten Kreise über $O\,Q'$. Diese Kardioide q stellt die Bildspur der Tangentenfläche der Zentralkubik dar.

4. Abbildung der Geraden

Das „Sehnenbild" g^s einer *Geraden* g ist die Bildspurkurve jener *„projizierenden Strahlfläche"* Γ, die von allen die Gerade g treffenden Sehnen der Zentralkubik c gebildet wird. Diese Strahlfläche Γ ist i. a.

[5] *E. Müller-E. Kruppa*, Vorlesungen über Darstellende Geometrie I (Wien 1923), 139.

Vgl. auch *R. Sturm*, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie I (Leipzig 1892), 291.

Der erste Hinweis auf eine Abbildung dieser Art findet sich in einem Brief von *L. Cremona* an *E. Beltrami* vom 1. 11. 1972 abgedruckt in Giornale di Matematiche 10 (Neapel 1872), 47—48.

Näher ausgeführt wurde dieser Hinweis in *F. Aschieri*, Sulla rappresentazione dello spazio rigato con un sistema di coniche in un piano. Rend. Ist. Lomb. Milano Ser. II, 12 (1879), 265—269.

F. Aschieri, Imagine piana dei complessi e delle loro intersezioni, ebenda, 341—347.

F. Aschieri, Sopra un metodo di rappresentazione piana per la geometria desrittiva dello spazio ordinario, ebenda 18 (1885), 494—505.

Der Abbildungsvorgang wird in diesen Arbeiten dadurch realisiert, daß zwei kollineare Bündel korrelativ auf ein Punktfeld bezogen werden.

von 4. Grad und IV. Art und besitzt die Zentralkubik als Doppelkurve[1]; g^s ist daher i. a. eine *rationale Quartik* mit Doppelpunkten in den Bildspurpunkten O, I, J von c.

Ist die Gerade g durch ihren Grundriß g' und ihren Zentraldrehriß g'' gegeben, so wird durch die Bildpaare P', P'' der Punkte P von g eine Projektivität $\mathfrak{P}$ zwischen g' und g'' bestimmt, wobei die Verbindungsgeraden entsprechender Bildpunkte die Bilder $s' = s''$ der g treffenden Sehnen s sind. Das Erzeugnis dieser Projektivität $\mathfrak{P}$, ein gewisser g' und g'' berührender Kegelschnitt γ, ist somit der *scheinbare Umriß* der projizierenden Fläche Γ für die Grundrißblickrichtung. Dieser scheinbare Umriß ist der Spurkegelschnitt jenes Tangentialzylinders 2. Klasse, den man der Fläche Γ aus dem Punkt U ihrer Doppelkurve c umschreiben kann.

Die Sehnenbilder P^s der Punkte P von g liegen in den Fußpunkten der Lote aus O auf die Tangenten s' von γ, d. h. *das Sehnenbild g^s einer Geraden g ist die Fußpunktkurve des scheinbaren Umrisses γ der projizierenden Fläche Γ durch g bezüglich des Poles O.*

Die Reyebilder P^* der Punkte P der Geraden g entstehen aus den Tangenten s' von γ durch Polarisieren am Zentralkreis c', also ist *das Reyebild g^* einer Geraden g der zum scheinbaren Umriß γ bezüglich des Zentralkreises c' polare Kegelschnitt.*

Der Kegelschnitt g^* besitzt nach der allgemeinen Theorie[1] unendlich viele Indreiecke, die dem Zentralkreis c' umschrieben sind, d. h. g^* ist ein *Schließungskegelschnitt* zu c'. Infolge der polaren Zuordnung zwischen g^* und γ ist c' Schließungskreis zu γ.

Zur *zeichnerischen Durchführung* der Abbildung einer Geraden g legen wir diese durch das Rißpaar g', g'' fest (Abb. 2). In der Projektivität $\mathfrak{P}$ entsprechende Punkte P' und P'' werden aus O bzw. u' durch zueinander normale Geraden projiziert. Dem Spurpunkt G von g z. B. entspricht der Fernpunkt G'' von g'' und dem Fernpunkt G'_u von g' ein Punkt G''_u von g''. Aus G gibt es außer g' noch eine Tangente an γ, die durch den Punkt G'' gehen muß und somit zu g'' parallel verläuft. Die von g'' verschiedene Tangente aus G''_u an γ geht durch G'_u und ist daher zu g' parallel. Damit ist ein dem Kegelschnitt γ umschriebenes Parallelogramm bekannt. Konstruiert man noch den Berührpunkt S'' von γ mit g'', der in $\mathfrak{P}$ dem Punkt $S' = g'\,g''$ (gezählt zur Reihe g') entspricht, so ist γ festgelegt.

Nach den obigen Ergebnissen kann aus γ g^s und g^* konstruiert werden. Die Fernpunkte des Reyebildes g^* entsprechen in der Po-

larität $\mathfrak{P}$ am Zentralkreis c' den Tangenten aus dem Mittelpunkt H des Zentralkreises c' an γ. Die Asymptoten des Reyebildes g^* sind somit zu diesen Tangenten normal. Der Mittelpunkt M^* von g^* ist der Pol bezüglich des Zentralkreises c' der Polaren m von H bezüglich γ.

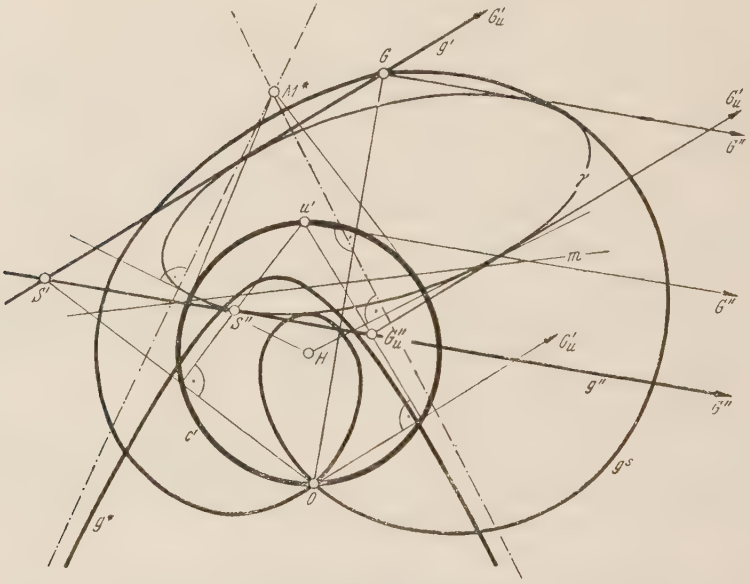

Abb. 2. Abbildung einer Geraden (von der Hyperbel g^* wurde nur ein Ast gezeichnet)

Zerfall des Sehnenbildes g^s einer Geraden g tritt ein, wenn diese einen oder zwei Zentralpunkte enthält, da sich von der projizierenden Fläche Γ dann die Sehnenkegel durch diese Zentralpunkte abspalten. Jede π-normale Gerade g z. B. geht durch den Fernpunkt U von c, das Sehnenbild g^s zerfällt daher in den Zentralkreis c' und einen Kreis über dem Durchmesser $O\,g'$; das (eigentliche) Reyebild g^* ist die Polare des Punktes g' bezüglich c'.

Das Sehnenbild g^s einer Geraden g zerfällt weiters, wenn die Bildebene π *einfache oder mehrfache Tangentialebene* der projizierenden Fläche Γ ist. Dies tritt ein, wenn g eine oder mehrere Seiten des Dreieckes $O\,I\,J$ trifft. Im ersten Fall besteht g^s aus einer ebenen Kurve 3. Ordnung und einer Erzeugenden von Γ. Ist g z. B. parallel zur Bildebene, so enthält Γ die Ferngerade der Bildebene. Der scheinbare Umriß γ von Γ ist dann eine Parabel, die von den jetzt zueinander

ähnlichen Punktreihen g' und g'' erzeugt wird. Das Sehnenbild g^s besteht aus der Fußpunktkubik dieser Parabel bezüglich O und der Ferngeraden der Bildebene. Liegt g hingegen in der Bildebene π, so besteht g^s aus g und den drei Sehnen in π.

Alle Sehnen, welche die zur z-Achse parallele Gerade h durch die Mitte H von c' treffen, erfüllen eine Strahlschar 2. Grades $\mathfrak{H}$, deren Bildspur der Kreis über dem Durchmesser $O\,H$ ist. Die Grundrisse jener Strahlen aus $\mathfrak{H}$, welche eine Gerade g schneiden, sind die Tangenten aus H an den Umriß γ der projizierenden Fläche Γ durch g, führen also auf die Asymptoten des Reyebildes g^*.

Fragt man, wann das Reyebild g^* von g speziell eine *Parabel* ist, so müssen offenbar die Schnittpunkte von g mit $\mathfrak{H}$ zusammenfallen. Alle Geraden, deren Reyebilder Parabeln sind, bilden daher den *quadratischen Tangentenkomplex der Fläche 2. Grades* $\mathfrak{H}$. Greift man das parabolische Strahlnetz der Tangenten längs einer festen Erzeugenden von $\mathfrak{H}$ heraus, so erhält man Bildparabeln mit gleicher Achsenrichtung.

Allgemeiner lassen sich auch alle Raumgeraden g angeben, deren Reyebilder g^* *Mittelpunktkegelschnitte mit vorgeschriebenem Asymptotenwinkel* (oder Achsenverhältnis) sind. Die Grundrisse jener Erzeugenden von $\mathfrak{H}$, welche eine solche Gerade g treffen, müssen den verlangten Asymptotenwinkel einschließen und induzieren dadurch in der Strahlschar $\mathfrak{H}$ eine gewisse Projektivität. Die Treffgeraden der Paare entsprechender Strahlen dieser Projektivität sind die gesuchten Geraden und bilden i. a. einen *quadratischen Strahlkomplex*. Soll g^* jedoch speziell eine *gleichseitige Hyperbel* sein, so ist die Projektivität involutorisch und die Mannigfaltigkeit der Geraden g bildet ein *Strahlgewinde*. Die Doppelstrahlen dieser Involution besitzen als Grundrisse die isotropen Asymptoten des Zentralkreises c', sind also die Tangenten i, j der Zentralkubik c in deren absoluten Punkten I, J. Die Geraden des durch i und j bestimmten *Drehnetzes* besitzen *Kreise* als Reyebilder.

Allgemein besitzen alle Strahlen eines durch zwei Erzeugenden von $\mathfrak{H}$ bestimmten Netzes ähnliche und ähnlich gelegene Bildkegelschnitte.

Um eine *Parameterdarstellung* des Sehnenbildes g^s bzw. des Reyebildes g^* einer Geraden g anzugeben, denken wir g durch Plückersche Linienkoordinaten p_{ik} festgelegt. Die von g getragene Punktreihe wird dann mittels eines Parameters λ beschrieben durch

$$1 : x : y : z = p_{03} : (p_{13} + \lambda\, p_{01}) : (p_{23} + \lambda\, p_{02}) : \lambda\, p_{03},$$

wobei $\lambda = 0$ den Bildspurpunkt und $\lambda = \infty$ den Fernpunkt kennzeichnet.

Setzt man diese Koordinatenwerte in (7) bzw. (10) ein, so erhält man Parameterdarstellungen von g^s bzw. g^*.

5. Abbildung der Ebenen

Alle Geraden einer Ebene ε treffen die drei ihr angehörenden Sehnen e_1, e_2, e_3 der Zentralkubik c, besitzen also Reyebilder, die ein Kegelschnittnetz um die Bildpunkte e_1^*, e_2^*, e_3^* dieser drei Sehnen bilden; das von den Punkten e_i^* gebildete Dreieck ε^*, das „*Umrißdreieck*" von ε, ist ein Umdreieck des Zentralkreises c. Die Zuordnung zwischen den ∞^3 Umdreiecken von c' und den ∞^3 Ebenen des Raumes ist dabei eineindeutig.

Eine vorgelegte Ebene ε abzubilden, ist konstruktiv i. a. eine kubische Aufgabe. Man bestimmt etwa den Grundriß l' ihres ebenen Schnittes l mit dem Kegel $\mathfrak{K}$. l' schneidet den Zentralkreis c' außer in O noch in drei weiteren Punkten; die Tangenten an c' in diesen drei Punkten bilden das Umrißdreieck ε^*.

Ist die Ebene ε speziell Tangentialebene oder sogar Schmiegebene der Zentralkubik c, so rücken die Ecken des Umrißdreieckes ε^* in entsprechender Weise zusammen. Ist ε parallel zur Bildebene π, so ist l' ein Kreis durch O und ε^* besteht aus den Minimalasymptoten von c' und der Tangente an c' im zweiten Schnittpunkt von l' mit c'. Ist ε normal zur Bildebene π, geht also durch U, so besteht ε^* aus der Tangente an c' in u' und den Tangenten an c' in den beiden Schnittpunkten der Spur von ε mit c'.

Sind zwei Umdreiecke ε_1^* und ε_2^* von c' *gleichsinnig kongruent*, so gehen sie durch eine Drehung um die Mitte H von c' ineinander über. Diese Drehung ist als automorphe Kollineation von c' das Reyebild einer automorphen Kollineation der Zentralkubik c, deren Fixsehne f die Drehungsmitte H als Reyebild f^* besitzt[1]; f ist daher die Verbindungssehne der absoluten Punkte I, J von c. Die beiden Ebenen ε_1 und ε_2 mit den Reyebildern ε_1^* und ε_2^* gehen dann durch diese automorphe Kollineation ineinander über, d. h.: *Alle Ebenen, die kongruente Umrißdreiecke besitzen, erfüllen i. a. die Torse eines der ∞^2 kubischen Kreise, die mit der Zentralkubik c das zu ihren absoluten Punkten gehörige Schmiegtetraeder gemeinsam haben.*

Geht die Ebene ε speziell durch die (reelle) Schnittgerade $\bar{f}$ der Schmiegebenen von I und J, so durchläuft ε bei der Kollineation das Ebenenbüschel um $\bar{f}$. ε^* ist dann ein Indreieck von $\bar{f}^*$. Da die Punkt-

reihe $\bar{f}$ bei der Kollineation als Ganzes festbleibt, muß $\bar{f}^*$ ebenfalls die Drehung um H gestatten, also ein Kreis um H sein. Als Schließungskreis zu c' ist $\bar{f}^*$ doppelt so groß wie c', d. h.: *Alle Ebenen des Büschels um die Schnittgerade der Schmiegebenen in den absoluten Punkten der Zentralkubik c besitzen gleichseitige Dreiecke als Umrißdreiecke.* Die Lage dieser Geraden $\bar{f}$ wird in Abschnitt 6 geklärt.

6. Umkehraufgaben

Die Punkte P, Geraden g und Ebenen ε bilden sich auf die Punkte P^*, Schließungskegelschnitte g^* und Umdreiecke ε^* des Zentralkreises c' im Reyeschen Bildfeld ab. Aus den Bildelementen sollen nun umgekehrt die zugehörigen Dingelemente im Raum rekonstruiert werden. Einem *Punkt* P^* entspricht dabei allerdings eine ganze Sehne s der Zentralkubik c, deren Bildpaar $s' = s''$ die Polare von P^* bezüglich c' ist.

Sei ε^* ein *Umdreieck* des Zentralkreises c'. Die Berührpunkte R_i' sind die Bilder von drei Zentralpunkten R_i, deren Verbindungsebene das Umrißdreieck ε^* besitzt[6]. Polarisiert man die drei Ecken von ε^* an c', so erhält man die Grundrisse der drei in ε liegenden Sehnen. Die Fußpunkte der auf diese Sehnengrundrisse aus O bzw. u' gefällten Lote liegen dann auf der Bildspur e bzw. auf der Zentraldrehfluchtspur e_u'' von ε. Dies ergibt den bekannten Satz der Dreiecksgeometrie: *Die Fußpunkte der Lote, die man auf die Seiten eines Dreiecks aus einem Punkt des Umkreises fällen kann, liegen auf einer Geraden* („*WALLACE-geraden*); *die zu Gegenpunkten des Umkreises gehörigen Wallacegeraden stehen aufeinander senkrecht.*

Vor der Rekonstruktion einer Geraden g aus einem Schließungskegelschnitt g^* von c' benötigen wir folgende *Hilfsaufgabe*: Man zeichne das Umrißdreieck ε^* jener Ebene ε durch eine Gerade g, die einen gegebenen Zentralpunkt R enthält. Eine Seite des gesuchten Umdreiecks ε^* von c' ist die Tangente R^* in R' an c'. Aus den beiden Schnittpunkten dieser Tangente R^* mit dem Reyebild g^* der Geraden g hat man an c' die restlichen Tangenten zu legen. Ihr Schnittpunkt e^*, die Gegenecke von R^* im Dreieck ε^*, muß auf g^* liegen[7].

---

[6] Nicht alle Seiten des Dreiecks ε^* müssen reell sein, sicher jedoch ist (für eine reelle Ebene ε) eine Seite von ε^*, z. B. die durch R_1' und ihre Gegenecke e_1^* reell. e_1^* ist das Bild einer Sehne e_1 in ε. Diese Sehne e_1 und der Zentralpunkt R_1 spannen dann die Ebene ε auf.

[7] Sind die Schnittpunkte von R^* mit g^* komplex, so suchen wir auf R^* die Involution konjugierter Punkte bezüglich g^*. Legt man aus ihren entsprechenden

Ist nun ein *Schließungskegelschnitt* g^* von c' gegeben, so ermitteln wir zuerst das Umrißdreieck δ^* der grundrißprojizierenden Ebene δ durch die gesuchte Dinggerade. Eine Seite dieses Indreiecks δ^* von g^* liegt in der Tangente U^* an c' in u' (Abb. 3), die beiden anderen Seiten

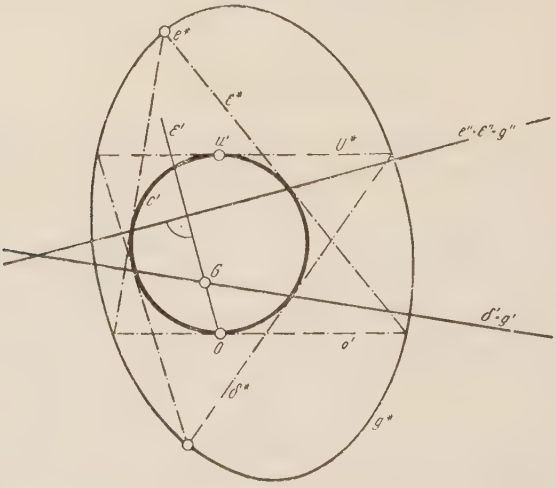

Abb. 3. Rekonstruktion einer Geraden aus ihrem Reyeschen Bildkegelschnitt

berühren c' in jenen Punkten, durch die die Spur δ' der projizierenden Ebene δ geht. Jene Ebene ε hingegen, die g aus O projiziert, besitzt ein Umrißdreieck ε^*, von dem eine Seite auf der Tangente o' an c' in O liegt. Die Gegenecke e^* dieser Dreieckseite ist das Reyebild einer Sehne e in ε, deren Zentraldrehriß $e'' = \varepsilon''$ durch die Polare von e^* bezüglich c' gegeben ist. Die gesuchte Dinggerade g ist nunmehr durch die projizierenden Hilfsebenen δ und ε, also durch ihr Bildpaar $g' = \delta'$ und $g'' = \varepsilon''$ festgelegt.

Nach diesem Muster findet man etwa die in Abschnitt 5 erwähnte Schnittgerade $\bar{f}$ der Schmiegebenen in I und J aus ihrem Reyebild $\bar{f}^*$, einem zu c' konzentrischen, doppelt so großen Kreis. Ihr Grundriß $\bar{f}'$ ist die Gerade $y = \frac{1}{4}$, ihr Zentraldrehriß $\bar{f}''$ die Gerade $y = \frac{3}{4}$. Ihr Bildspurpunkt $\overline{F}$ liegt daher im Punkt $(0, \frac{1}{4})$ und aus ihrem Zentraldrehfluchtpunkt $\overline{F}''_u\,(0, \frac{3}{4})$ ergibt sich ihr Anstieg mit $tg\ \nu = 4$.

Punkten die von R^* verschiedenen Tangenten an c', so erhält man eine Involution unter den Tangenten von c'. Ihre Involutionsachse schneidet c' in den Berührpunkten der von R^* verschiedenen Seiten von ε^* mit c'. Der Pol der Achse bezüglich c' ist also die (reelle) Gegenecke e^* zu R^* im Schließungsdreieck ε^*.

7. Abbildung der Gewinde

Bildet man ein *Strahlgewinde* $\mathfrak{G}$ dadurch ab, daß man die ∞^1 ihm angehörenden Sehnen der Zentralkubik aufsucht, so erhält man als Reyebild i. a. einen Kegelschnitt $\mathfrak{G}^*$, der keinerlei Besonderheiten aufweist[1]. Die Zuordnung zwischen den ∞^5 Gewinden $\mathfrak{G}$ des Raumes und den ∞^5 Kegelschnitten $\mathfrak{G}^*$ der Bildebene ist eineindeutig. Den ∞^4 singulären Gewinden entsprechen dabei die ∞^4 Schließungskegelschnitte g^* von c'.

Da jede Raumkurve 3. Ordnung Gewindekurve ist, so ist zu erwarten, daß bei der *Abbildung eines Gewindes mittels der Sehnen einer im Gewinde enthaltenen Kubik* konstruktiv besonders übersichtliche Verhältnisse entstehen.

Ein aufrechter kubischer Kreis ist durch Vorgabe seiner Asymptote und seiner Scheiteltangente vollständig festgelegt; es gibt demnach ∞^8 aufrechte kubische Kreise, darunter ∞^7, deren Scheiteltangente — wie bei der durch (1) gegebenen Kubik — gegen die Asymptote unter 45^0 geneigt ist. In jedem der ∞^5 Gewinde stehen mithin ∞^2 solcher spezieller Kurven 3. Ordnung zur Verfügung, die durch die Schraubungen um die Gewindeachse miteinander vertauscht werden. Wird eine derselben als Zentralkubik c gewählt, so stellen ihre Tangenten die „projizierenden" Gewindestrahlen dar und das Reyebild $\mathfrak{G}^*$ des Gewindes $\mathfrak{G}$ fällt mit dem Zentralkreis c' zusammen. Wir wollen nun dieses Gewinde konstruktiv untersuchen.

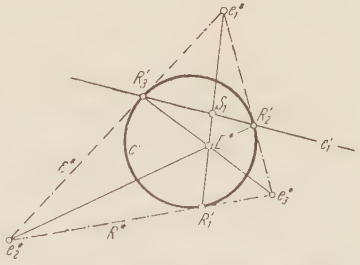

Abb. 4. Nullpunkt einer Ebene

a) Nullpunkt einer Ebene. Jede Ebene ε trifft die Zentralkubik c in drei Punkten R_i, deren Nullebenen Schmiegebenen von c sind. Sie schneiden ε in Schmiegstrahlen m_i, die gleichzeitig Gewindestrahlen sind und daher durch den Nullpunkt E von ε gehen. Als eigentliches Reyebild des Schmiegstrahles m_i tritt — unter Abspaltung der Tangente von c' in R_i' — die durch R_i' gehende Eckenlinie des Umrißdreiecks ε^* auf (Abb. 4). Der Bildpunkt E^* des gesuchten Nullpunktes E erscheint mithin als *GERGONNEscher Punkt* des Umrißdreiecks ε^*[8].

[8] Die Polare e_1' der Ecke e_1^* bezüglich c' schneidet die Gerade $R_1' e_1^*$ in einem Punkt S_1 (Abb. 4). — Damit kann E^* als zu e_1^* bezüglich R_1 und S_1 harmonischer Punkt konstruiert werden, falls etwa nur die Ecke e_1^* von ε^* reell ist.

b) Reziproke Polare. Die reziproke Polare g einer Geraden g ist der Ort der Nullpunkte E der durch g gehenden Ebenen ε. Die Umrißdreiecke ε^* dieser Ebenen sind die c' umschriebenen Indreiecke von g^*; $\bar{g}^*$ muß daher von der Gergonneschen Punkten dieser ∞^1 Dreiecke ε^* erfüllt werden. Da die vier die Gerade g treffenden Tangenten von c als Gewindestrahlen auch $\bar{g}$ schneiden, gehören die Kegelschnitte g^*, $\bar{g}^*$ und c' einem Büschel an und es gilt: *Die Gergonneschen Punkte E^* aller Umdreiecke eines Kreises c', die einem Schließungskegelschnitt g^* von c' eingeschrieben sind, erfüllen den durch die vier Schnittpunkte von c' mit g^* gehenden zweiten Schließungskegelschnitt $\bar{g}^*$.*

Ist g speziell eine *Sehne* und damit $\bar{g}$ eine „Achse" der Zentralkubik, so gehören die Kegelschnitte g^*, $\bar{g}^*$ und c' einem Berührbüschel an, wobei hier unter g^* das vollständige, aus einem Tangentenpaar von c' bestehende Reyebild der Sehne g zu verstehen ist. Der Sehnengrundriß g' gibt die Berührsehne des Büschels ab[9].

c) Bilder der Gewindestrahlen. Ein Gewindestrahl w fällt mit seiner reziproken Polaren w zusammen. Der Ort der Gergonneschen Punkte E^* der dem Reyebild w^* des Gewindestrahles w eingeschriebenen Umdreiecke ε^* von c' ist daher der Kegelschnitt w^* selbst. Dazu genügt es, daß der Gergonnesche Punkt eines dieser Dreiecke ε^* auf w^* liegt; $\bar{w}^*$ hat dann nämlich mit w^* fünf Punkte gemeinsam, fällt also mit w^* zusammen.

Die ∞^3 Bildkegelschnitte w^* der ∞^3 Gewindestrahlen w schneiden c' somit in Punktequadrupeln R_i von der Art, daß durch jedes von ihnen nur ein Schließungskegelschnitt von c' geht. Zur Charakterisierung dieser Kegelschnitte führen wir folgende *Hilfsüberlegung* durch:

g^* sei das Reyebild einer Geraden g; schneidet g außer der Tangente t_1 an c im Zentralpunkt R_1 noch die R_1 mit dem Zentralpunkt Q verbindende Sehne $s = R_1 Q$, so ist die Ebene $t_1 Q$, in der auch g liegt, eine Tangentialebene des von Q ausstrahlenden Sehnenkegels; g berührt also diesen Sehnenkegel. Die Übertragung ins Reyebild liefert: *Die Tangenten an c' in den vier Schnittpunkten von c' mit einem seiner Schließungskegelschnitte g^* schneiden g^* noch in den Berührpunkten der vier gemeinsamen Tangenten von c' und g^*.*

---

[9] Das Doppelverhältnis der vier Büschelkegelschnitte hat den festen Wert $(g^*\ \bar{g}^*\ g'\ c') = -3$, wie man erkennt, wenn man mittels einer (u. U. komplexen) automorphen Kollineation von c die Sehne g in die Ferngerade der Bildebene wirft; $\bar{g}^*$ wird dann gemäß Abschnitt 5 der zu c' konzentrische Kreis doppelter Größe.

Die Tangente $R_1{}^*$ von c' in R_1' schneidet g^* noch in s^*; die Tangente Q^* in s^* an g^* berührt dann c' in Q'. Wirft man nun durch eine (u. U. komplexe) Kollineation zwei Schnittpunkte R_3' und R_4' von c' und g^* in die absoluten Punkte, so gehen g^* und c' in Kreise $\mathfrak{g}^*$ und $\mathfrak{c}'$ (die deutschen Buchstaben bezeichnen dabei die entsprechenden Elemente im transformierten Feld) mit den restlichen Schnittpunkten $\mathfrak{R}_1'$ und $\mathfrak{R}_2'$ über. Soll nun durch $\mathfrak{R}_1'$, $\mathfrak{R}_2'$ nur *ein* Schließungskreis $\mathfrak{w}^*$ zu $\mathfrak{c}'$ existieren, so muß der Gergonnesche Punkt jedes $\mathfrak{w}^*$ eingeschriebenen Umdreiecks von $\mathfrak{c}'$ auf $\mathfrak{w}^*$ liegen; wählt man speziell jenes (ausgeartete) Umdreieck, das von der (doppelt überdeckten) Geraden $\mathfrak{s}^*$ $\mathfrak{R}_1'$ und der Geraden $\mathfrak{Q}^*$ gebildet wird, so muß die Gerade $\mathfrak{Q}'$ $\mathfrak{R}_1'$ den Kreis $\mathfrak{w}^*$ berühren. Der Kreis $\mathfrak{c}'$ berührt also $\mathfrak{Q}^*$ in $\mathfrak{Q}'$, $\mathfrak{R}_1'$ $\mathfrak{s}^*$ in $\mathfrak{R}_1'$, der Kreis $\mathfrak{w}^*$ die Gerade $\mathfrak{Q}^*$ in $\mathfrak{s}^*$ und die Gerade $\mathfrak{R}_1'$ $\mathfrak{Q}'$ in $\mathfrak{R}_1'$; das Dreieck $\mathfrak{s}^*$ $\mathfrak{Q}'$ $\mathfrak{R}_1'$ ist daher *gleichseitig*, die beiden Kreise $\mathfrak{c}'$ und $\mathfrak{w}^*$ sind *kongruent* und der Winkel $\sphericalangle$ ($\mathfrak{R}_1{}^*$, $\mathfrak{R}_1'$ $\mathfrak{R}_2'$) hat den Wert $\pi/6$. Nach Anwendung des Tangenten-Peripheriewinkelsatzes und Rücktransformation ins ursprüngliche Bildfeld ergibt sich unter Verwendung der *Laguerre*schen Formel[10], wenn man $exp\, i\pi/3 = \zeta_6$ (6. Einheitswurzel) setzt: *Durch vier Punkte eines Kreises c' gibt es genau dann nur einen Schließungskegelschnitt zu c', wenn unter den Doppelverhältnissen, welche diese vier Punkte auf c' bestimmen, der Wert ζ_6 vorkommt; in solchen Quadrupeln schneiden die Reyebilder w^* der Gewindestrahlen w den Zentralkreis c'.*

d) Nullebene eines Punktes. Ein Punkt E sei durch sein Reyebild E^* und das Umrißdreieck τ^* einer seiner Trägerebenen τ festgelegt. Die reziproke Polare $\bar{s}$ der Sehne s durch E und der Nullpunkt T der Ebene τ spannen dann die gesuchte Nullebene auf.

e) Die Achsen der Zentralkubik. Im Gewinde $\mathfrak{G}$ entspricht jeder Sehne s eine Achse $\bar{s}$, deren Reyebilder $\bar{s}^*$ nach Fn. 9 *kongruente Kreise* vom Radius $C\, ln(-3)$ sind, wenn man c' als Maßkegelschnitt einer *Cayley-Klein*schen Maßbestimmung mit der Maßkonstanten C auffaßt. Die Bilder $\bar{s}'$ und s'' einer Achse $\bar{s}$ sind aus $\bar{s}^*$ nach den allgemeinen Methoden (Abschnitt 6) konstruierbar, können jedoch leicht direkt gefunden werden.

Die Sehne s, gegeben durch ihr Reyebild s^*, durchstößt die Nullebene des Fernpunktes U in einem Punkt D, dessen Reyebild D^* mit s^* zusammenfällt. Die Nullebene von D ist dann die erstprojizierende

[10] Sind a, b die Schenkel eines Winkels a und d das Doppelverhältnis von a, b mit den Minimalstrahlen i, j durch den Winkelscheitel, so ist $d = (abij) = exp\, 2\, i\, a$.

Ebene δ durch die zu s reziproke Achse $\bar{s}$. Ihr Umrißdreieck δ^* besitzt s^* als Gergonneschen Punkt; bezeichnet man die Gegenecke der Seite von δ^* auf der Tangente U^* in u' an c' mit A_1, den Schnittpunkt der Geraden $u'\ s^*\ A_1$ mit der Polaren von A_1 bezüglich c' mit S_1 und ihren zweiten Schnittpunkt mit c' mit Q_1 (Abb. 5), so ist $(A_1\ S_1\ Q_1\ u') = -1$ und nach Fn. 8 $(A_1\ s^*\ S_1\ u') = -1$. Daraus folgt $(s^*\ S_1\ Q_1\ u') = 3$.[11] Der Grundriß $\bar{s}'$ von $\bar{s}$ geht nach Abschnitt 6 durch S_1 und steht nichteuklidisch-normal zu $u'\ s^*$.

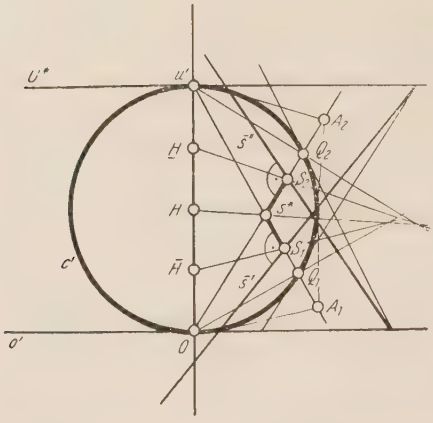

Abb. 5. Bilder einer Achse der Zentralkubik

Die Sehne s durchstößt die Nullebene des Punktes O in einem Punkt E mit dem Reyebild $E^* = s^*$, dessen Nullebene ε die Achse $\bar{s}$ aus O projiziert. Ihr Umrißdreieck ε^* besitzt ebenfalls s^* als Gergonneschen Punkt. Ist S_2 der Schnittpunkt der Polaren der Gegenecke A_2 in ε^* zur Seite auf o' mit $O\ s^*\ A_2$, so gilt analog zu oben $(s^*\ S_2\ Q_2\ O) = 3$, wenn Q_2 der zweite Schnittpunkt von Os^* mit c' ist[12]. Nach Abschnitt 6 geht der Zentraldrehriß $\bar{s}''$ von $\bar{s}$ durch S_2 und steht nichteuklidisch-normal zu Os^*.

Im Sinne der obigen nichteuklidischen Maßbestimmung gilt somit: *Der Grundriß s' und der Zentraldrehriß $\bar{s}''$ der zur Sehne s reziproken Achse $\bar{s}$ gehen durch jene Punkte S_1 bzw. S_2, die aus dem Reyebild s^* von s durch eine Schiebung nach dem uneigentlichen Punkt u' bzw. O um die konstante Strecke $C\ ln\ 3$ entstehen und stehen zu den Schiebrichtungen $u'\ s^*$ bzw. $O\ s^*$ normal*[13].

---

[11] Man kann aus den bekannten Punkten u', s^*, Q_1 den Punkt S_1 etwa so finden, daß man die Mitte H von c mit s^* und O mit Q_1 verbindet; den Schnittpunkt dieser Geraden mit dem Halbierungspunkt $\bar{H}$ der Strecke $O\ H$ verbunden, liefert auf $u'\ s^*$ den Punkt S_1.

[12] S_2 läßt sich analog wie S_1 konstruieren, wenn man jetzt an Stelle $\bar{H}$ den Mittelpunkt H der Strecke $u'\ H$ verwendet.

[13] Diese Schiebungen sind (im Gegensatz zur euklidischen Geometrie) keine kongruenten Transformationen.

In jeder Schmiegebene ϱ von c umhüllen die Achsen einen *Klassenkegelschnitt*, der dem von R ausstrahlenden Sehnenkegel im Gewinde $\mathfrak{G}$ entspricht. Die Reyebilder s^* der von R ausstrahlenden Sehnen s erfüllen die Tangente R^* in R' an c'. Die Pole A_1 der Grundrisse $\bar{s}'$ der zu s reziproken Achsen s haben von den entsprechenden Punkten s^* auf R^* in Richtung nach u' die konstante Entfernung $C\,ln(-3)$, erfüllen also einen c' in u' und R' berührenden Kegelschnitt, der Abstandskreis des Schnittpunktes von R^* und U^* ist; dieser Punkt ist das Reyebild der durch R gehenden lotrechten Sehne. Führt man dieselbe Überlegung für einen anderen Zentralpunkt Q durch, so gibt es eine Grenzdrehung um u', die Q' nach R' führt, wobei Q^* in R^* übergeht. Da sich bei dieser Drehung auch die zu Q^* bzw. R^* gehörigen Ortskurven der Punkte A_1 entsprechen, sind alle diese Abstandskreise *kongruent*. Man erhält ihren Radius durch Betrachtung einer speziellen Tangente von c' zu $C\,ln\,[(\sqrt{3}-2):(\sqrt{3}+2)]$. Durch Polarisieren an c' erhält man die Grundrisse der in den Schmiegebenen von c liegenden „Achsenkegelschnitte". Faßt man den von einem Kubikpunkt U ausstrahlenden Sehnenkegel als *Maßkegel* auf, so gilt: *Projiziert man die Achsenkegelschnitte einer Kubik c aus einem ihrer Punkte U, so erhält man kongruente Drehkegel vom Achsenwinkel* $C\,ln\,[(2-\sqrt{3}):(\sqrt{3}+2)]$, *deren Achsen in der Schmiegebene von U liegen.*

Durch Anwendung des Gewindes $\mathfrak{G}$ erhält man die duale Aussage.

f) Konstruktion der Achse des Gewindes $\mathfrak{G}$. Der Fernpunkt V der Gewindeachse a ist der Nullpunkt der Fernebene ω, die durch die Punkte U, I, J der Kubik c geht. Ihr Umrißdreieck ω^* besteht daher aus der Tangente U^* in u' an c' und den isotropen Tangenten i' und j' von c', die sich in H schneiden. Das Reyebild V ist als Gergonneschen Punkt dieses Dreiecks ω^* nach Fn. 8 der zu H bezüglich u' symmetrische Punkt und das Bildpaar $v' = v''$ der durch V gehenden Sehne v ist als Polare von V^* bezüglich c' die Gerade $y = 3\,r : 2$ (r ... Radius von c'). Der Zentraldrehfluchtpunkt dieser Sehne v ist V'', V^0 hat daher die Koordinaten $(r : 2, 0)$; die Gewindeachse a hat somit gegen die Bildebene die Böschung $tg\,\nu = 4$.[14]

In analoger Weise ergibt sich der Nullpunkt N der Bildebene π. Das Reyebild π^* von π besteht aus den Tangenten o', i', j' von c', N^* ist also der zu H bezüglich O symmetrische Punkt. Die durch N gehende

[14] Dies folgt schon aus Abschnitt 6, weil f als reziproke Polare der in ω liegenden Sehne $f = IJ$ ein Durchmesser von $\mathfrak{G}$ sein muß.

Sehne n hat die Polare von N^* bezüglich c' als Bildpaar $n' = n''$ und N besitzt als Bildspurpunkt von n die Koordinaten $(0, r : 2)$.

Die Nullebene σ von O wird als Schmiegebene von c von der Tangente o und der y-Achse aufgespannt; die y-Achse ist also Gewindestrahl. Da die Richtung der Gewindeachse a y-normal ist, muß sie die y-Achse in einem Punkt Y schneiden. Bezeichnen wir die orientierten Strecken $\overrightarrow{Y\,N}$ mit r_1 und $\overrightarrow{Y\,O}$ mit r_2, so gilt, wenn p der Parameter des Gewindes $\mathfrak{G}$ ist und φ_1 bzw. φ_2 die Winkel von π bzw. σ gegen die Gewindeachse a sind:

$$p = r_1 \,.\, tg\,\varphi_1 = r_2 \,.\, tg\,\varphi_2, \text{ also: } p = 4\,r_1 = 3\,r_2 : 5.$$

Mit $r_1 + r/2 = r_2$ ergeben sich daraus die *Gleichungen der Gewindeachse* a

$$y = 10\,r : 17,\ z = 4\,x \tag{12}$$

und für den *Parameter* p von $\mathfrak{G}$ gilt:

$$p = 6\,r : 17. \tag{13}$$

Umgekehrt ist durch (12) und (13) (bis auf Schraubungen um die Gewindeachse a) die *Lage der Zentralkubik* c *in einem gegebenen Gewinde festgelegt.*

Eine Verallgemeinerung der eindimensionalen linearen Gruppe mod n

Von

Wilfried Nöbauer, Wien

(Eingelangt am 23. März 1956)

I. In früheren Arbeiten ([1], [2]) habe ich mich mit der Gruppe $\mathfrak{G}_n$ beschäftigt, welche gebildet wird von den Restklassen nach dem Ideal der Restpolynome mod n, deren Polynome den Restklassenring mod n umkehrbar eindeutig auf sich abbilden, wenn als Gruppenoperation die Operation des Einsetzens genommen wird. Insbesondere hat sich dabei herausgestellt, daß sich die Untersuchung der Struktur von $\mathfrak{G}_n$ zurückführen läßt auf das Studium der Gruppe $\mathfrak{T}_{p^e}$. Dies ist jene Untergruppe von $\mathfrak{G}_{p^e}$, welche aus allen Elementen dieser Gruppe mit einem Vertreterpolynom $f(x)$ der Form

$$f(x) = a_0 + a_1 x + p a_2 x^2 + \ldots + p^{e-1} a_e x^e$$

besteht.

In dieser Arbeit zeigen wir nun, daß allgemein die Menge aller Elemente von $\mathfrak{G}_n$ mit einem Vertreterpolynom $g(x)$ der Form

$$g(x) = a_0 + a_1 x + t a_2 x^2 + \ldots + t^{r-1} a_r x^r$$

— wobei die a_i ganze Zahlen sind und t eine feste natürliche Zahl ist — ebenfalls eine Untergruppe $\mathfrak{G}(n, t)$ von $\mathfrak{G}_n$ bildet. In $\mathfrak{G}(n, t)$ haben wir also eine zweifach unendliche Schar von Gruppen vor uns. Bei festgehaltenem t ergibt $\mathfrak{G}(n, t)$ ein Beispiel für den von mir kürzlich eingeführten Begriff der $\mathfrak{M}$-Untergruppe von $\mathfrak{G}_n$. Übrigens enthält, wie wir sehen werden, die Menge der Gruppen $\mathfrak{G}(n, t)$ sowohl die Gruppe $\mathfrak{G}_n$, als auch die eindimensionalen linearen Gruppen $\mathfrak{M}_n$; mit $\mathfrak{M}_n$ bezeichnen wir also die Untergruppe von $\mathfrak{G}_n$, welche aus allen Elementen mit einem linearen Polynom als Vertreter besteht. Wir leiten im folgenden einige Sätze über $\mathfrak{G}(n, t)$ ab; vor allem zeigen wir, daß jede Gruppe $\mathfrak{G}(n, t)$ direktes Produkt ist von Gruppen $\mathfrak{G}(p^e, p^r)$ mit $r \leqq e$. Auf die Untersuchung dieser Gruppen ist die Strukturuntersuchung von $\mathfrak{G}(n, t)$

also zurückgeführt. Es hat aber den Anschein, daß sich diese $\mathfrak{G}(p^e, p^r)$ nicht weiter aus einfacheren Bestandteilen aufbauen lassen.

Um die Lesbarkeit der Arbeit nicht unnötig zu erschweren, verwenden wir nur einige grundlegende Begriffe und Sätze meiner Arbeit [1], und zwar aus den §§ 1, 3, 7, 8 dieser Arbeit, obwohl wir insbesondere durch Berufung auf meine Arbeit [3] über $\mathfrak{M}$-Untergruppen manche Überlegungen vereinfachen könnten.

II. Wir haben also zunächst folgenden Satz zu beweisen:

Satz 1: Es seien $n>1$ und $t\geqq 1$ zwei natürliche Zahlen. Die Menge aller der Elemente der Gruppe $\mathfrak{G}_n$, welche ein Vertreterpolynom $f(x)$ der Gestalt

$$f(x) = a_0 + a_1 x + t a_2 x^2 + \ldots + t^{r-1} a_r x^r \tag{1}$$

mit ganzzahligen a_i und beliebigem Grad r besitzen, bildet eine Untergruppe $\mathfrak{G}(n, t)$ von $\mathfrak{G}_n$.

Beweis: Wird $F \in \mathfrak{G}_n$ durch $f(x)$ und $G \in \mathfrak{G}_n$ durch $g(x)$ vertreten, so wird FG durch das Polynom $f(g(x))$ vertreten. Wir brauchen also bloß zu zeigen, daß mit $f(x)$ und $g(x)$ auch $f(g(x))$ die Gestalt (1) hat.

Zu diesem Zweck setzen wir

$$F(x) = t a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_r x^r$$

dann haben wir

$$f(x) = \frac{1}{t} F(tx)$$

ebenso haben wir mit

$$G(x) = t b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_s x^s$$

$$g(x) = \frac{1}{t} G(tx)$$

also ergibt sich

$$f(g(x)) = \frac{1}{t} F(t \frac{1}{t} G(tx)) = \frac{1}{t} F(G(tx)) \tag{2}$$

Es ist aber das konstante Glied in $F(G(x))$ gegeben durch

$$F(G(0)) = t a_0 + a_1 t b_0 + a_2 (t b_0)^2 + \ldots$$

also durch t teilbar, also hat wegen (2) auch $f(g(x))$ die Gestalt (1).

III. Wir denken uns nun zunächst t festgehalten und betrachten also $\mathfrak{G}(n, t)$ als „Funktion" von n. Wir beweisen hier sogleich

Satz 2: Ist $n = ab$ mit $(a, b) = 1$, so gilt die direkte Produktzerlegung

$$\mathfrak{G}(n, t) = \mathfrak{G}(a, t) \times \mathfrak{G}(b, t) \tag{3}$$

Man betrachte nämlich die in [1], § 3 vorgenommene direkte Produktzerlegung $\mathfrak{G}_n = \mathfrak{G}_a \times \mathfrak{G}_b$. Ist nun $F \in \mathfrak{G}(n, t)$ und $f(x)$ ein Vertreter der Gestalt (1) für F, so vertritt dieses $f(x)$ auch die Komponenten F_a, F_b von F in $\mathfrak{G}_a$ bzw. $\mathfrak{G}_b$, diese gehören also zu $\mathfrak{G}(a, t)$ bzw. $\mathfrak{G}(b, t)$. Ist umgekehrt ein Paar von Elementen G_a, G_b aus $\mathfrak{G}(a, t)$ bzw. $\mathfrak{G}(b, t)$ gegeben, und sind $f(x)$ bzw. $g(x)$ Vertreter der Form (1) dafür, so wird das Element G von $\mathfrak{G}_n$, welches bei der Zerlegung von $\mathfrak{G}_n$ die Komponenten G_a, G_b besitzt, vertreten durch ein Polynom

$$u\, f(x) + v\, g(x)$$

mit geeignet gewählten ganzen Zahlen u, v. Wie sogleich zu sehen ist, hat dieses Polynom wieder die Gestalt (1), G gehört also zu $\mathfrak{G}(n, t)$. Bei der Zerlegung $\mathfrak{G}_n = \mathfrak{G}_a \times \mathfrak{G}_b$ sind also die Elemente von $\mathfrak{G}(n, t)$ und die Elementepaare aus $\mathfrak{G}(a, t)$ und $\mathfrak{G}(b, t)$ einander umkehrbar eindeutig zugeordnet und deshalb ist Satz 2 richtig.

Weiter beweisen wir den folgenden

Satz 3: Aus m/n folgt, daß $\mathfrak{G}(m, t)$ homomorphes Bild von $\mathfrak{G}(n, t)$ ist.

Ist nämlich $F \in \mathfrak{G}(n, t)$ und $f(x)$ ein Vertreter der Gestalt (1) für F, so vertritt $f(x)$ auch ein Element $\overline{F}$ von $\mathfrak{G}(m, t)$ — $f(x)$ erzeugt ja doch ein volles Restsystem mod n, daher auch ein volles Restsystem mod m — und $\overline{F}$ ist von der Wahl des Vertreters $f(x)$ für F nicht abhängig. Dieses $\overline{F}$ ordnen wir dem F als Bild zu, und man erkennt leicht, daß bei dieser Zuordnung dem Produkt zweier Elemente das Produkt ihrer Bildelemente entspricht; die Abbildung ist also eine Homomorphie von $\mathfrak{G}(n, t)$ in $\mathfrak{G}(m, t)$.

Wir zeigen nun zunächst, daß diese Homomorphie im Fall $n = p^e$ stets ein Homomorphismus ist. Es sei also $m = p^d$ mit $d \leqq e$ und $\overline{F}$ ein Element von $\mathfrak{G}(p^d, t)$ mit dem Vertreter $f(x)$ der Gestalt (1). Wir unterscheiden drei Fälle:

a) $d > 1$: Das $f(x)$ erzeugt ein volles Restsystem mod p^d, daher nach [1], Hilfssatz 8a auch ein volles Restsystem mod p^e, vertritt daher auch ein Element $F \in \mathfrak{G}(p^e, t)$, welches auf $\overline{F}$ abgebildet wird.

b) $d = 1$, $t \equiv 0 \bmod p$: In diesem Fall besitzt $\overline{F}$, wie unmittelbar zu sehen, auch einen Vertreter

$$f(x) = a_0 + a_1 x \text{ mit } a_1 \not\equiv 0 \bmod p$$

dieses $f(x)$ erzeugt natürlich auch ein volles Restsystem mod p^e und vertritt ein Element $F \in \mathfrak{G}(p^e, t)$, das $\overline{F}$ zum Bild hat.

c) $d = 1$, $t \not\equiv 0 \bmod p$: Es erzeugt $f(x)$ ein volles Restsystem mod p. Da $x^p - x$ Restpolynom mod p ist, vertritt auch das Polynom

$$g(x) = f(x) + s(x)\,(x^p - x)$$

das $\overline{F}$, und man kann das ganzzahlige Polynom $s(x)$ so wählen, daß gilt:

$$g'(u) \equiv f'(u) - s(u) \not\equiv 0 \bmod p$$

für jedes ganze u. Dieses $g(x)$ erzeugt nach [1], Hilfssatz 8 ein volles Restsystem mod p^e. Es sei etwa

$$g(x) = \sum_{i=0}^{r} a_i\, x^i$$

Wir wählen ein ganzes z mit $tz \equiv 1 \bmod p^e$ und bilden uns

$$\bar{g}(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{r} a_i (tz)^{i-1}\, x^i = a_0 + \sum_{i=1}^{r} t^{i-1}\, b_i\, x^i$$

dieses $\bar{g}(x)$ vertritt ein Element $F \in \mathfrak{G}(p^e, t)$, das auf $\overline{F}$ abgebildet wird.

Es sei nun $n = \Pi\, p_i^{e_i}$ und $m = \Pi\, p_i^{d_i}$ mit $d_i \leqq e_i$. Weiter sei $\overline{F} \in \mathfrak{G}(m, t)$ mit dem Vertreter $f(x)$ der Gestalt (1) gegeben. Dieses $f(x)$ vertritt nach den Überlegungen beim Beweis von Satz 2 auch Elemente $\overline{F}_i$ von $\mathfrak{G}(p_i^{d_i}, t)$; zu diesen gibt es nach dem bisher festgestellten Elemente F_i von $\mathfrak{G}(p_i^{e_i}, t)$ mit Vertretern $f_i(x)$ der Gestalt (1), so daß $f_i(x) - f(x)$ Restpolynom mod $p_i^{d_i}$ ist. Wieder nach den Überlegungen beim Beweis von Satz 2 gibt es ein $F \in \mathfrak{G}(n, t)$ mit Vertreter $g(x)$, so daß $g(x) - f_i(x)$ Restpolynom mod $p_i^{e_i}$ ist, daher ist $g(x) - f(x)$ Restpolynom mod m und F hat tatsächlich $\overline{F}$ zum Bild.

IV. Wegen Satz 2 kommt es vor allem darauf an, die Gruppen $\mathfrak{G}(p^e, t)$ zu untersuchen. Dazu müssen wir $\mathfrak{G}(n, t)$ als „Funktion" von t betrachten. Zunächst formulieren wir

Satz 4: *Aus s/t folgt $\mathfrak{G}(n, t) \subseteq \mathfrak{G}(n, s)$.*

Der Beweis ist sehr leicht. Ist $F \in \mathfrak{G}(n, t)$, so besitzt es einen Vertreter

$$f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{r} t^{i-1}\, a_i\, x^i = a_0 + \sum_{i=1}^{r} s^{i-1}\, q^{i-1}\, a_i\, x^i = a_0 + \sum_{i=1}^{r} s^{i-1}\, b_i\, x^i$$

gehört also auch zu $\mathfrak{G}(n, s)$.

Nun beweisen wir

Satz 5: *Ist $(p^e, t) = p^r$, so gilt $\mathfrak{G}(p^e, t) = \mathfrak{G}(p^e, p^r)$.*

Wegen Satz 4 haben wir nämlich zunächst $\mathfrak{G}(p^e, t) \subseteq \mathfrak{G}(p^e, p^r)$. Ist nun $r < e$ und $F \in \mathfrak{G}(p^e, p^r)$, so nehme man einen Vertreter

$$f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{s} (p^r)^{i-1}\, a_i\, x^i$$

für F. Man bestimme eine ganze Zahl u aus der Kongruenz

$$u \frac{t}{p^r} \equiv 1 \bmod p^e$$

und bilde das Polynom

$$\bar{f}(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{s} (p^r)^{i-1} (u \frac{t}{p^r})^{i-1} a_i x^i = a_0 + \sum_{i=1}^{s} t^{i-1} b_i x^i$$

dieses vertritt ersichtlich auch das Element F; F gehört also auch zu $\mathfrak{G}(p^e, t)$. Es bleibt noch der Fall $r = e$ zu behandeln: Ist $F \in \mathfrak{G}(p^e, p^e)$, so besitzt es, wie sofort zu sehen ist, einen Vertreter

$$g(x) = a_0 + a_1 x$$

dieser gehört natürlich zu den Polynomen (1), also haben wir wieder $F \in \mathfrak{G}(p^e, t)$.

Wir haben weiter folgenden

Satz 6: *Es gilt* $\mathfrak{G}(n, s) = \mathfrak{G}(n, t)$, *wenn* $(n, s) = (n, t)$ *ist. Insbesondere ist* $\mathfrak{G}(n, s) = \mathfrak{G}(n, t)$, *wenn* $s \equiv t \bmod n$ *ist.*

Beweis: Es sei $n = \Pi\, p_i^{e_i}$ die Primzahlzerlegung von n. Nach Satz 2 und Satz 5 gilt

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{G}(n, s) &= \Pi\, \mathfrak{G}(p_i^{e_i}, s) = \Pi\, \mathfrak{G}(p_i^{e_i}, (p_i^{e_i}, s)) \\ \mathfrak{G}(n, t) &= \Pi\, \mathfrak{G}(p_i^{e_i}, t) = \Pi\, \mathfrak{G}(p_i^{e_i}, (p_i^{e_i}, t)) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Es ist aber nach Voraussetzung

$$(n, s) = \Pi(p_i^{e_i}, s) = (n, t) = \Pi(p_i^{e_i}, t)$$

wegen der Eindeutigkeit der Primzahlzerlegung gilt also

$$(p_i^{e_i}, s) = (p_i^{e_i}, t)$$

für alle i und (4) liefert dann die Behauptung.

Aus dem soeben bewiesenen Satz ergibt sich, daß jede der Gruppen $\mathfrak{G}(n, t)$ gleich ist einer der Gruppen $\mathfrak{G}(n, d)$ mit d/n; es gibt also bei festgehaltenem n höchstens soviele verschiedene Gruppen $\mathfrak{G}(n, t)$, als n Teiler besitzt. Aus der Definition von $\mathfrak{G}(n, t)$ erkennt man sogleich, daß gilt

$$\mathfrak{G}(n, 1) = \mathfrak{G}_n \qquad \mathfrak{G}(n, n) = \mathfrak{M}_n$$

V. Wir haben schon gesehen, daß sich alle Gruppen $\mathfrak{G}(n, t)$ aus Gruppen $\mathfrak{G}(p^e, p^r)$ mit $r \leqq e$ aufbauen. Meine bisherigen Versuche haben ergeben, daß eine Strukturuntersuchung dieser Gruppen auf beträchtliche Schwierigkeiten führt. In einer früheren Arbeit [2] habe ich gezeigt, daß $\mathfrak{G}(p^e, 1)$ sich darstellen läßt als Symmetrie $\Sigma_p\, \mathfrak{G}(p^{e-1}, p)$;

es ist mir bisher nicht gelungen, auch $\mathfrak{G}(p^e, p^r)$ für $r > 0$ als monomiale Gruppe darzustellen, vermutlich ist das überhaupt nicht möglich.

Wir wollen aber als einzige Aussage über $\mathfrak{G}(p^e, p^r)$ die Ordnung dieser Gruppe angeben und gehen bei ihrer Berechnung ähnlich vor wie in der soeben erwähnten Arbeit [2]. Zunächst benötigen wir wieder einen

Hilfssatz: *Ist $i > 0$, so ist die kleinste natürliche Zahl t, für die es ein Restpolynom mod p^e der Gestalt*

$$s_i(x) = t\,p^{(i-1)r}\,x^i + t_1\,p^{(i-2)r}\,x^{i-1} + \ldots + t_{i-1}\,x + t_i \tag{5}$$

mit ganzen Koeffizienten t_ν gibt, gegeben durch

$$t = p^{e-(i-1)r-\varepsilon(i)} \tag{6}$$

wenn $p^n = 1$ gesetzt wird für $n \leqq 0$ und $\varepsilon(i)$ den Exponenten bezeichnet, zu dem p in der Primzahlzerlegung von $i!$ vorkommt.

Beweis: Zunächst gilt nach [1], Hilfssatz 4

$$tp^{(i-1)r} \equiv 0 \mod p^{e-\varepsilon(i)}$$

also auch

$$t \geqq p^{e-(i-1)r-\varepsilon(i)}$$

Wir nehmen nun das Polynom $r_i(x) = \prod_{u=0}^{i-1}(x-u)$ und bilden uns damit das Polynom

$$p^{e-(i-1)r-\varepsilon(i)}\,p^{(i-1)r}\,r_i(x) = \begin{cases} p^{(i-1)r}\,r_i(x), \text{ wenn } e-(i-1)r \leqq \varepsilon(i) \\ p^{e-\varepsilon(i)}\,r_i(x), \text{ wenn } e-(i-1)r > \varepsilon(i) \end{cases}$$

Dieses Polynom hat, wie die linke Seite zeigt, die Gestalt (5) mit $t = p^{e-(i-1)r-\varepsilon(i)}$ und ist, wie die rechte Seite unter Beachtung einer Bemerkung vor Hilfssatz 4 in [1] lehrt, ein Restpolynom mod p^e, also gilt auch

$$t \leqq p^{e-(i-1)r-\varepsilon(i)}$$

Diesen Hilfssatz benötigen wir zum Beweis von

Satz 7: *Man erhält für $r \geqq 1$ ein genaues Vertretersystem der Gruppe $\mathfrak{G}(p^e, p^r)$, wenn man in der Potenzreihe*

$$p(x) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(p^r)^{\nu-1}\,a_\nu\,x^\nu \tag{7}$$

die Koeffizienten in folgenden Grenzen variieren läßt:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leqq a_0 < p^e \\ 0 \leqq a_1 < p^e \quad a_1 \not\equiv 0 \mod p \\ 0 \leqq a_\nu < p^{e-(\nu-1)r-\varepsilon(\nu)} \text{ für } \nu \geqq 2 \end{array}\right\} \tag{8}$$

Beweis: Ist $F \in \mathfrak{G}(p^e, p^r)$, so besitzt es ein Vertreterpolynom

$$g(x) = b_0 + \sum_{\nu=1}^{i} (p^r)^{\nu-1} b_\nu x^\nu$$

Durch Abziehen eines geeignet gewählten ganzzahligen Vielfachen des Restpolynoms $s_i(x)$ von (5) mit durch (6) gegebenem i erhalten wir ein Vertreterpolynom für F der Gestalt

$$g_1(x) = c_0 + \sum_{\nu=1}^{i} (p^r)^{\nu-1} c_\nu x^\nu$$

mit $0 \leqq c_i < p^{e-(i-1)r-\varepsilon(i)}$. Von $g_1(x)$ ziehen wir analog ein geeignet gewähltes Vielfaches von $s_{i-1}(x)$ ab usw. So erhalten wir schließlich einen Vertreter (7) für F mit Koeffizienten, welche (8) erfüllen, denn da dieser Vertreter ein volles Restsystem mod p^e, also auch mod p erzeugt, gilt auch $a_1 \not\equiv 0 \bmod p$.

Umgekehrt vertritt jedes Polynom (7) mit Koeffizienten innerhalb (8) ein Element von $\mathfrak{G}(p^e, p^r)$, denn wegen $a_1 \not\equiv 0 \bmod p$ erzeugt es ein volles Restsystem mod p und wegen $p'(x) \equiv a_1 \not\equiv 0 \bmod p$ auch ein volles Restsystem mod p^e.

Daß schließlich die Differenz zweier solcher Polynome nicht Restpolynom mod p^e sein kann, ergibt sich ganz leicht aus dem Hilfssatz.

Satz 7 ermöglicht uns, die Ordnung $o(e, r)$ von $\mathfrak{G}(p^e, p^r)$ auszurechnen, wir brauchen ja nur die Anzahl der Elemente des Vertretersystems abzuzählen. Diese Abzählung — die wie gesagt nur für $r \geqq 1$ gilt — ergibt

$$o(e, r) = p^e(p-1)\, p^{e-1} \prod_{\nu=2}^{u} p^{e-(\nu-1)r-\varepsilon(\nu)} = (p-1)\, p^S \tag{9}$$

wenn mit u die größte Lösung der Ungleichung

$$(\nu - 1)\, r + \varepsilon(\nu) < e \tag{10}$$

bezeichnet wird und gesetzt wird

$$S = (e-1) + \sum_{\nu=1}^{u} (e - (\nu - 1)\, r - \varepsilon(\nu)) \tag{11}$$

Wir können den Ausdruck S natürlich auch für $r = 0$ bilden. In diesem Falle haben wir also

$$S = \sum_{\nu=0}^{u} (e - \varepsilon(\nu)) - 1$$

wenn u jetzt die größte Lösung der Ungleichung

$$\varepsilon(\nu) < e$$

bezeichnet. Der Vollständigkeit halber wollen wir auch $o(e, 0)$ durch S ausdrücken, fassen uns dabei aber kurz:

Nach [2], (15) gilt für $e > 1$

$$o(e, 0) = \frac{p!\,(p-1)^p}{p^{2p}}\,\beta(p^e)$$

und dabei ist $\beta(p^e)$ nach [1], Seite 219 gegeben durch

$$\beta(p^e) = p^R \qquad R = \sum_{\nu=0}^{u} (e - \varepsilon(\nu)) = S + 1$$

also haben wir für $e > 1$

$$o(e, 0) = \frac{p!\,(p-1)^p}{p^{2p-1}}\,p^S \tag{12}$$

Auch aus dieser Formel erkennt man wiederum die Sonderstellung von $\mathfrak{G}(p^e, 1)$ gegenüber den anderen $\mathfrak{G}(p^e, p^r)$.

Literatur

[1] Über Gruppen von Restklassen nach Restpolynomidealen. S. B. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa, **162**, 207—233 (1953).

[2] Gruppen von Restpolynomidealrestklassen nach Primzahlpotenzen. Monatsh. Math. **59**, 194—202 (1955).

[3] $\mathfrak{M}$-Untergruppen von Restklassengruppen. Erscheint in Monatsh. Math. **60**.

Buchbesprechungen

Luigi Bianchi: Opere. Vol. IV: Deformazioni delle quadriche. Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche. Parte prima. 480 S. Roma: Edizioni Cremonese. 1956. Lire 4500.

R. Calapso gibt eine Einführung und hebt dabei die Verdienste von *L. Bianchi* gebührend hervor. Dann folgen 13 Arbeiten des Autors zu dem im Titel angegebenen Teilgebiet der Differentialgeometrie, die im ersten Jahrzehnt dieses Jahrhunderts erschienen sind.

N. Hofreiter, Wien

Articles et Mémoires. Von *A. Denjoy*. Reproduits et rassemblés avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique. 1. Band: X, 507 S. — 2. Band: VI, 600 S. Paris: Gauthier-Villars. 1955. ffr. 5100.

Denjoy, einer der bekanntesten lebenden Mathematiker, hat außer seinen wohlbekannten Werken noch eine große Anzahl von Arbeiten verfaßt, von denen nicht alle einem breiteren Leserkreis vertraut sein werden, hauptsächlich weil sie in nicht immer zugänglichen Zeitschriften veröffentlicht wurden. Solche Abhandlungen wurden hier auf photomechanischem Weg reproduziert und gesammelt herausgegeben. Der erste Band enthält 14 Abhandlungen aus der komplexen Funktionentheorie, der zweite 18 Abhandlungen aus der Theorie der reellen Funktionen. Es braucht wohl nicht betont zu werden, von wie großem Wert die Herausgabe dieser Arbeiten für jeden Mathematiker ist. Sind es doch gerade auch die kleineren Arbeiten, welche den Werdegang großer Ideen erkennen lassen. Und es ist auch sehr interessant zu lesen, daß der Entdecker des nach ihm benannten Integralbegriffes und der Forscher, von dem so schöne Sätze über ganze Funktionen stammen, z. B. auch über die Funktionalgleichung der Zetafunktion und die Newtonsche Näherungsmethode gearbeitet hat. Es ist sicher, daß diese vielen schönen Arbeiten, in einem Band gesammelt, den Mathematikern der jüngeren Generation viele neue Anregungen und wertvolle Erkenntnisse vermitteln werden. Möge das auch von dem folgenden Satz gelten, den der Verfasser im Vorwort ausspricht: „J'ai tonjours répugné à la généralisation purement formelle, exercice facile et stérile s'il ne conduit à la solution d'aucun problème venu d'ailleurs et différent de celui d'où la notion première a pris sa naissance."

K. Prachar, Wien

Die geistige Arbeit. Von *A. Speiser*. (Wissenschaft und Kultur: Band 9.) 207 S. Basel und Stuttgart: Birkhäuser Verlag. 1955. sfr. 19.25, DM 19.25.

In diesem Buch sind 13 Aufsätze und Vorträge des Verfassers vereinigt, die sich vorwiegend mit philosophischen Themen befassen. Alle Untersuchungen stehen unter dem gemeinsamen Leitgedanken, zu zeigen, wie das mächtige Werkzeug des Denkens den Menschen und die Menschheit befähigt, Ordnung in das scheinbare Chaos der Außenwelt zu bringen und zu großen Höhen der Erkenntnis aufzusteigen; erst bei dem „Eins" *Platos* findet dieses Denken seine

unübersteigbare Grenze, über die nur noch der geoffenbarte Glaube hinweghelfen kann. Sehr eindrucksvoll tritt die Kraft des menschlichen Denkens in der Mathematik und in der Kunst in Erscheinung, daher ist auch ein Teil der Untersuchungen diesen beiden Gebieten und ihrem Zusammenhang gewidmet. Das besondere Interesse des Autors gilt jedoch der Philosophie *Platos* und ihrem Einfluß auf die abendländische Geisteswelt, der sich über die Neuplatoniker und die Kirchenlehrer herauf bis zu den deutschen Idealisten des 19. Jahrhunderts und bis in unsere Zeit erstreckt.

Sicherlich wird jeder für philosophische und ästhetische Fragen aufgeschlossene Leser den Gedankengängen des Verfassers mit Aufmerksamkeit und Anteilnahme folgen.

W. Nöbauer, Wien

Complete Theories. Von *A. Robinson*. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.) 129 S. Amsterdam: North-Holland Publishing Company. 1956. fl. 13.50.

Der Inhalt des Buches liegt im Rahmen neuerer Untersuchungen von *Tarski* u. a., insbesondere jedoch der Ideen, welche der Verf. seit einiger Zeit verfolgt (vgl. z. B. „On the metamathematics of algebra" 1951 aus dieser Sammlung). Ein Teil der Ergebnisse wurde bereits im Symposium über „Mathematische Interpretation formaler Systeme" 1954 bekanntgemacht, wie etwa der Hauptsatz über notwendige und hinreichende Bedingungen für die Modell-Vollständigkeit von Systemen geschlossener Formeln K des engeren Prädikatenkalküls. Die in diesem Symposium gehaltenen Vorträge sind übrigens ebenfalls in einem Band der Sammlung veröffentlicht. Es werden im vorliegenden Band für eine Reihe algebraischer Strukturen (z. B. reell abgeschlossene Körper, bewertete Körper) Vollständigkeitsaussagen gemacht. Die Ergebnisse finden sich wohl im wesentlichen auch schon bei *Tarski*. Der originelle Weg dorthin führt hier jedoch über den erwähnten Begriff der Modell-Vollständigkeit. Eine widerspruchsfreie Menge K heißt modell-komplett, wenn für jedes Modell von K die Vereinigungsmenge von K mit dem Diagramm, d. i. die Menge der im Modell erklärten „richtigen Formeln", vollständig ist. Später wird der Begriff des Primmodells eingeführt und gezeigt, daß jede modell-vollständige Menge K, welche ein Primmodell besitzt, vollständig ist. Anderseits zeigt der Verf., daß die Begriffe der Modell-Vollständigkeit und der Vollständigkeit nicht vergleichbar sind. Bezüglich des im letzten Kapitels dargelegten Zusammenhanges zwischen syntaktischen Transformationen und Beschränktheits- und Stetigkeitskonzepten muß auf das Buch verwiesen werden. Hinsichtlich der Stetigkeit werden nur Andeutungen gemacht, die Ausführung wird für später versprochen. Das Buch enthält eine Reihe von Druckungenauigkeiten, die sich an manchen Stellen gerade bei den grundlegenden Definitionen eingeschlichen haben, z. B. S. 3, 32 und 67.

L. Schmetterer, Wien

Mathematical Interpretation of Formal Systems. Von *Th. Skolem*, *G. Hasenjaeger*, *G. Kreisel*, *A. Robinson*, *H. Wang*, *L. Henkin*, *J. Łoś*. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.) 113 S. Amsterdam: North-Holland Publishing Company. 1956. fl. 12.—.

Das Buch enthält Vorträge und Diskussionsbemerkungen (*Hasenjaeger*), welche auf einem Symposium in Amsterdam 1954 gehalten wurden. *Skolem* geht von seinem klassisch gewordenen Resultat aus, daß außer der Menge der natürlichen Zahlen noch andere Modelle existieren, welche den Axiomen von *Peano*

genügen. Weiter werden nun für Teilsysteme der rekursiven Arithmetik solche Modelle auf konstruktivem Weg gefunden. Die Diskussionsbemerkungen von *Hasenjaeger* schließen daran an. *Kreisel* vertieft seine Untersuchungen (Fundamenta Mathematicae, Mathematische Zeitschrift u. a.) über die Beziehungen zwischen den Begriffen des Modells, der Übersetzbarkeit eines Systems in ein anderes und der Interpretation und den Widerspruchsfreiheitsbegriffen. Er faßt dabei den Begriff der Übersetzbarkeit allgemeiner als dies seinerzeit *Wang* getan hat. Besonders soll auf den Beweis der ω-Widerspruchsfreiheit des Systems Z von *Hilbert* und *Bernays* hingewiesen werden. Durch ihn wird nahegelegt, daß der Beweis der ω-Widerspruchsfreiheit für die kodifizierte Zahlentheorie ohne Induktion in Z nicht formalisierbar ist. Mittels eines Satzes von *Gentzen* wird das auch tatsächlich nachgewiesen. *Wang* gibt einen Überblick über die von ihm vielfach behandelten Fragen, die im Zusammenhang mit der Formalisierbarkeit von Widerspruchsfreiheitsbeweisen stehen und neues Licht auf das erwähnte Resultat von *Skolem* und die Zahlentheorie relativ zu einem Mengensystem werfen. Hiebei weist *Wang* auch auf seine Ideen über den Aufbau der Analysis hin, der in engster Verwandtschaft mit dem konstruktiven Aufbau von *Lorenzen* steht. Die beiden letzten Beiträge beschäftigen sich mit abstrakten Algebren, ausgehend von Untersuchungen von *Tarski* und *Birkhoff*.

L. Schmetterer, Wien

Intuitionism. An Introduction. Von *A. Heyting*. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.) VIII, 132 S. Amsterdam: North-Holland Publishing Company. 1956. fl. 13.50.

Während in dem bekannten Ergebnisband des Verf. die geschichtliche Entwicklung und der Aspekt der Grundlagenforschung im Vordergrund stehen, wird hier insbesondere „die Praxis des Intuitionismus" gelehrt, d. h. die intutionistische Mathematik. Das hat den großen Vorteil, daß der an der klassischen Mathematik geschulte Leser unschwer „intuitionistisch" denken lernt. Der Text wird teilweise als Gespräch zwischen Anhängern der verschiedensten Anschauungen gestaltet. Diese Methode wurde schon einmal in einem Werk dieser Sammlung mit Erfolg verwendet. Die Darstellung der intuitionistischen Analysis reicht bis zur Maßtheorie und dem Konzept des Hilbertschen Raumes. Die Theorie der Derivation bleibt außerhalb des Rahmens dieser Einführung. Dann folgt eine kurze Einführung in den Prädikatenkalkül erster Stufe und seine Anwendungen. Das letzte Kapitel „controversial subjects" geht von den zahlreichen Beispielen aus, die *Brouwer* in der letzten Zeit ersonnen hat, welche die Ungültigkeit wichtiger klassischer Theoreme (in intuitionistischer Auffassung) zeigen. Ihren Kern hat *van Dantzig* herausgeschält. Wenige Schlußbemerkungen sind der „radikalen" Auffassung von *Griss* gewidmet. Das Buch ist verständlich geschrieben und wird sicherlich die Bemühungen des Autors lohnen, die Kenntnis der intuitionistischen Mathematik zu verbreiten.

L. Schmetterer, Wien

College Algebra and Trigonometry. Von *F. H. Miller*. Zweite Auflage. Mit 36 Textabb., XIV, 342 S. New York: J. Wiley & Sons. — London: Chapman & Hall. 1955. $ 4.50.

In diesem reichhaltigen Buch wird in 15 Kapiteln der Mathematik-Lehrstoff ausführlich besprochen, der etwa für die 5. und 6. Klasse unserer Gymnasien bzw. Realgymnasien vorgeschrieben ist. Das 16. und letzte Kapitel behandelt in knapper Form die Permutationen, Kombinationen und den Begriff der Wahrscheinlichkeit. In jedem Kapitel sind am Ende eines Abschnittes zahlreiche

Übungsbeispiele angeführt; ihre Gesamtzahl beträgt mehr als 2000. Der Anhang enthält die vierstelligen Logarithmen der Zahlen 10—999; weitere Tafeln geben für den Schritt von 10—10 Minuten die natürlichen Werte und die Logarithmen der vier Winkelfunktionen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens an. Eine Zusammenstellung der Lösungen und ein ausführliches Sachregister beschließen das empfehlenswerte Buch. *J. Laub*, Wien

Anschauliche Arithmetik und Algebra. Von *W. Lietzmann*. Zweite Auflage. Mit 168 Textabb., 226 S. Würzburg: Physica-Verlag. 1956.

Der Verfasser sagt im Vorwort: „Es handelt sich um eine elementare Funktionslehre in dem Sinne, daß infinitesimale Methoden und Grenzbetrachtungen vermieden werden." In 10 Abschnitten werden behandelt: Die empirischen Funktionen, die linearen Funktionen; Funktionen, deren graphische Bilder (höhere) Parabeln sind, die rationalen ganzen Funktionen, deren graphische Bilder (höhere) Hyperbeln sind, empirische periodische Funktionen, Wurzelkurven und die graphische Darstellung der Exponentialfunktionen und der logarithmischen Funktion. An geeigneten Stellen werden das Rechnen mit relativen Zahlen, die Kombinatorik und das Rechnen mit komplexen Zahlen besprochen. An den zahlreichen treffenden Beispielen erweist sich die reiche Erfahrung und das besondere pädagogische Geschick des bekannten und erfolgreichen Verfassers. Es wäre wünschenswert, wenn die Neuauflage dieses ausgezeichneten Buches einen etwas regelmäßigeren Druck aufweisen würde. *J. Laub*, Wien

Einführung in die Algebra. Von *R. Kochendörffer*. (Hochschulbücher für Mathematik: Band 18.) XII, 316 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1955. DM 23.60.

In ihrer modernen, abstrakten Form bereitet die Algebra dem Anfänger erfahrungsgemäß beträchtliche Schwierigkeiten. Das Buch will nun dem Studenten das erste Eindringen in diesen so wichtigen und schönen Zweig der Mathematik erleichtern; daher ist der Text, besonders in den ersten Kapiteln, recht ausführlich geschrieben und die fundamentalen Begriffe, wie Gruppe, Isomorphie, Homomorphie, Ring, Körper usw. werden an verschiedenen Beispielen verdeutlicht. Die Auswahl des gebotenen Stoffes ist aber durchaus dem heutigen Stand angemessen; die Darstellung folgt im allgemeinen den üblichen, bewährten Wegen. Die Übungsaufgaben am Ende des Buches werden vom Leser ohne große Mühe und mit Gewinn gelöst werden, allerdings ist ihre Anzahl — es sind insgesamt 60 — wohl zu gering.

Der erste Teil des Buches behandelt die Grundbegriffe: Mengen, die Elemente der rationalen Zahlentheorie, Gruppentheorie (bemerkenswert ist hier, daß statt des üblichen Beweises für die Einfachheit der alternierenden Gruppe ein durchsichtigerer — von *Redei* stammend — gebracht wird), Ringe und Körper, Polynome. Der zweite Teil bringt die Theorie der Körpererweiterungen, Galoissche Theorie und Bewertungstheorie. Im dritten Teil findet man die Theorie der endlichen R-Moduln (mit dem Basissatz für abelsche Gruppen und der Jordanschen Normalform von Matrizen als Anwendungen), ferner die Anfangsgründe der Algebrentheorie und der Darstellungstheorie von Gruppen und Algebren. Von den in einer Einführungsvorlesung gewöhnlich gebrachten Dingen fehlen vor allem die Grundtatsachen der linearen Algebra, welche als bekannt vorausgesetzt werden.

Der aufmerksame Leser dieses Buches wird sich jedenfalls ein gediegenes Fundament an Kenntnissen in der Algebra erwerben. *W. Nöbauer*, Wien

Additive Zahlentheorie. Von *H.-H. Ostmann*. 1. Teil: Allgemeine Untersuchungen. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge: Heft 7.) VII, 233 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. DM 29.80.

Die additive Zahlentheorie ist bis heute, obwohl viele Einzelresultate von großer Schönheit und Tiefe gefunden wurden, noch in einem ziemlich unsystematischen Zustand, hauptsächlich wegen der Schwierigkeit der auftretenden Probleme, deren Lösung oft ganz verschiedene Methoden erfordert. Es ist also ein sehr verdienstvolles Unternehmen, in diese Vielfalt von Resultaten ein gewisses Maß von Ordnung hineinzubringen. Der Verfasser, der schon in seinen Arbeiten stets dieses Ziel verfolgte, hat nun diese mühevolle Arbeit unternommen. Die additive Zahlentheorie beschäftigt sich vor allem mit der folgenden Frage: Seien gewisse Mengen A, B, C, ... von nichtnegativen ganzen Zahlen gegeben. Welche Zahlen lassen sich als Summe einer Zahl aus A und einer Zahl aus B und einer Zahl aus C,... darstellen, wie oft lassen sich diese dann so darstellen, usw. Der vorliegende 1. Teil beschäftigt sich hauptsächlich mit dem Fall, daß A, B, C,... möglichst allgemeine Mengen sind und nicht etwa ganz spezielle wie die Menge der Primzahlen (Goldbachsches Problem) oder die Menge der k-ten Potenzen von natürlichen Zahlen (Waringsches Problem).

Der Stoff ist in 17 Abschnitte gegliedert. Die ersten Abschnitte befassen sich mit den allgemeinen Eigenschaften der Summenbildung, mit dem Begriff der Basis, Primitivität und ähnlichem. Der 7. Abschnitt bringt eine genaue Übersicht über die Partitionen-Probleme. Hier findet sich z. B. auch ein Beweis für die Darstellung von $p(n)$ durch die Rademachersche Reihe, welche ihrerseits eine Verbesserung der berühmten Hardy-Ramanujanschen asymptotischen Entwicklung ist. Die nächsten Abschnitte bringen eine Diskussion der verschiedenen Dichtebegriffe, wobei z. B. bei der Dirichlet-Dichte auch damit zusammenhängende Taubersche Sätze besprochen werden. Es folgen die zahlreichen Untersuchungen über die verschiedenen Basiseigenschaften von Mengen und deren Zusammenhang mit den Dichtebegriffen. Hier spielt der bekannte Satz von *Mann* eine fundamentale Rolle. Den Schluß bildet ein Abschnitt über den Zusammenhang mit der Struktur der Menge der dyadischen Entwicklungen, welche man den Mengen natürlicher Zahlen zuordnen kann.

Die Darstellung ist klar und übersichtlich. Besondere Sorgfalt wurde auf ein möglichst vollständiges Literaturverzeichnis gelegt, welches gerade in diesem Teil der Zahlentheorie dringend nötig war und etwa 900 Zitate enthält. Hoffentlich wird bald auch der 2. Teil dieses interessanten Werkes verfügbar sein.

K. Prachar, Wien

Initiation au Calcul Matriciel. Matrices — Déterminants — Applications à l'Algèbre et à la Géométrie Analytique. Von *A. Monjallon*. 132 S. Paris: Librairie Vuibert. 1955. ffr. 700.

Das Buch setzt sich keine höheren wissenschaftlichen Ziele. Es will nur eine Einführung in die lineare Algebra für Studierende der Mathematik, der Physik und der Technik sein. Daher ist die Darstellung sehr breit und sehr leicht verständlich. Alle Begriffe und alle Sätze werden an zahlreichen Beispielen veranschaulicht. Beweise werden nur ganz wenige gegeben. Sogar viele grundlegende Sätze werden nur plausibel gemacht. Die Determinanten werden induktiv mittels der Entwicklung nach Zeilen eingeführt. An Beispielen lernt der Leser das Wichtigste über lineare Gleichungssysteme kennen. Das Rechnen mit Matrizen wird fleißig geübt. Kurz werden auch charakteristische Wurzeln und quadra-

tische Formen behandelt. Auch Anwendungen auf analytische Geometrie (Bewegungen, Hauptachsentransformation) werden gebracht.

N. Hofreiter, Wien

Summierung unendlich kleiner Größen. Einführung in die Integralrechnung. Von *I. P. Natanson.* (Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik: Band XII.) Mit 26 Textabb., 60 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1955. DM 3.25.

Das Büchlein setzt sich zum Ziel, den Grundbegriff der Differential- und Integralrechnung, den Begriff des Grenzwertes einer Summe, einfach und verständlich darzustellen.

Es werden Formeln für das Volumen eines Drehzylinders, Drehkegels, einer Pyramide, einer Kugel, eines Zylinderhufes, eines Drehparaboloids und Drehellipsoids, die Quadratur der Sinuslinie und die Volumsberechnung eines Drehkörpers, der durch Rotation einer Sinuslinie entsteht, abgeleitet. Es werden zahlreiche Anwendungen gebracht. 15 Aufgaben, zu denen die Lösungen angegeben sind, beschließen das Bändchen, das u. a. den Schülern der 7. und 8. Klassen unserer Mittelschulen zu empfehlen ist. Freilich wird bei uns nicht mehr von „unendlich kleinen Größen" gesprochen. *J. Laub*, Wien

Flächeninhalte und Logarithmen. Von *A. I. Markuschewitsch.* (Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik: Band X.) Mit 34 Textabb., 53 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1955. DM 4.25.

Felix Klein gab die Anregung, die Logarithmen mit Hyperbelflächen einzuführen wie es z. B. bereits *Scheffers* in dem Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften und Technik ausgeführt hat. Der Verfasser beschreitet einen Weg, wie man ihn auch z. B. in dem Buch von *Breidenbach* „Arithmetik und Algebra zum Selbststudium", Leipzig 1942, ausgeführt findet.

Im vorletzten Abschnitt wird auf die Bedeutung des natürlichen Logarithmus für die Verteilung der Primzahlen hingewiesen. Es sei jedoch aufmerksam gemacht, daß die Formulierung auf S. 48—49 den Eindruck erwecken könnte, daß der Primzahlsatz von *Tschebyscheff* bewiesen worden ist, während er bekanntlich erst mit den Riemannschen Methoden von *Hadamard* und *de la Vallée-Poussin* bewiesen wurde.

Wenn sich auch im Unterricht an unseren Mittelschulen die Einführung des Logarithmus mit Hilfe der Hyperbelflächen nicht eingebürgert hat, ist es doch förderlich, auf Arbeiten dieser Art hinzuweisen. *J. Laub*, Wien

Lehrgang der höheren Mathematik. Teil II. Von *W. I. Smirnow.* (Hochschulbücher für Mathematik: Band 2.) Mit 145 Textabb., XII, 580 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1955. DM 29.50.

Das Buch ist eine Übersetzung aus dem Russischen nach der 12. Auflage. Es enthält: Elementare Lösungsmethoden für gewöhnliche Differentialgleichungen, lineare Differentialgleichungen mit vielen Anwendungen aus der Physik, mehrfache Integrale, Kurvenintegrale, uneigentliche Integrale, Integrale, die von einem Parameter abhängen, Vektoralgebra und Vektoranalysis, Feldtheorie, Anfangsgründe der Differentialgeometrie, harmonische Analyse, Fouriersches Integral, die Hauptprobleme für partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik (Wellengleichung, Telegraphengleichung, Stabschwingungen, Laplacesche

Gleichung, Wärmeleitungsgleichung). Die Darstellung ist leicht verständlich. Es wird meist von anschaulichen Vorstellungen ausgegangen. Oft haben die Überlegungen zunächst nur richtungsweisenden Charakter. Exakte Formulierungen und strenge Beweise werden manchmal auf später verschoben (Existenzbeweis für gewöhnliche Differentialgleichungen, mehrfache Integrale, Fouriersche Reihen). Das Buch enthält viele Aufgaben aus Physik und Technik. Zahlreiche Literaturhinweise beschließen das ausgezeichnete Lehrbuch. *N. Hofreiter*, Wien

Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen. Von *H. Wittich.* (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge: Heft 8.) Mit 31 Textabb., IV, 163 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. DM 25.60.

Diese Auslese von Problemen, die nicht nur die Ergebnisse, sondern auch die Beweise bringt, beginnt mit der Theorie des Maximalgliedes von *Wiman* und *Valiron*; diese und die anschließend kurz gebrachte Wertverteilungslehre finden sodann Anwendung auf die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Es folgt ein Abschnitt über konforme und quasikonforme Abbildungen von Ringgebieten, einer zum Typenproblem mit dem Kriterium von *Nevanlinna-Wittich*, ein weiterer zum Umkehrproblem der Wertverteilung und ein letzter den Funktionen mit beschränktem Dirichlet-Integral. *H. Hornich*, Graz

Differential Equations. Von *H. W. Reddick* und *D. E. Kibbey.* Dritte Auflage. IX, 304 S. New York: J. Wiley & Sons. — London: Chapman & Hall. 1956. $ 4.50.

Der Verfasser gibt hier, meist gleich an Hand von Beispielen und mit mehreren hundert Übungsaufgaben (deren Lösung als Anhang angegeben werden) die gebräuchlichsten Methoden zur Lösung von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen; die auf dem Buchumschlag angekündigte Theorie der Differentialgleichungen beschränkt sich auf ganz einfache Erläuterungen.

H. Hornich, Graz

Intégration des équations différentielles ordinaires par la méthode de Drach. Von *G. Heilbronn.* (Mémorial des sciences mathématiques: Heft 133.) 101 S. Paris: Gauthier-Villars. 1956.

Wie schon in Nummer 129 derselben Sammlung für die partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung gibt der Verf. nunmehr hier für die gewöhnlichen Differentialgleichungen (natürlich wieder in engem Zusammenhang mit den partiellen Differentialgleichungen) die Integrationstheorie von *Drach* wieder.

H. Hornich, Graz

Plane Waves and Spherical Means Applied to Partial Differential Equations. Von *F. John.* (Interscience tracts in pure and applied mathematics: Nr. 2.) VIII, 172 S. New York: Interscience Publishers. 1955. $ 4.50.

Der Verfasser knüpft an die Radonsche Darstellung willkürlicher Funktionen durch Integrale über ebene Schnitte an und verwendet diese für das Cauchysche Problem der hyperbolischen Differentialgleichungen, sowie für elliptische Differentialgleichungen. Ein weiteres verwandtes Hilfsmittel geben die Mittelbildungen einer Funktion über Kreisscheiben; es werden die Sätze von *Asgeirsson*

und *Howard* abgeleitet und mit diesen Hilfsmitteln, wie naheliegend, Differentierbarkeitsfragen der Lösungen der elliptischen Differentialgleichungen untersucht. *H. Hornich*, Graz

Neue Existenzsätze in der Theorie nichtlinearer Integralgleichungen. Von *H. Schaefer*. (Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematische Klasse: Band 101, Heft 7.) 40 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1955. DM 2.40.

Der Fixpunktsatz von *Tychonoff* in der Formulierung von *Schauder* liefert die Grundlage für Existenzsätze bei gewissen nichtlinearen Integralgleichungen vom Hammersteinschen Typus, sowie für die von *Schmeidler* untersuchten algebraischen Integralgleichungen. *H. Hornich*, Graz

Fünfstellige Tabellen zu den elliptischen Funktionen. Dargestellt mittels des Jacobischen Parameters q. Von *M. Schuler* und *H. Gebelein*. Mit einem englischen Text von *Lauritz S. Larsen*. Mit 11 Textabb., XI, 114 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. Geb. DM 29.60.

Während die bisherigen Tafeln zu den elliptischen Funktionen nach dem Legendreschen Modul geordnet sind, wird hier mit dem Jacobischen Parameter q gearbeitet. Der Grund ist der, weil damit eine bessere Interpolation erreicht wird. In einer ausführlichen Einleitung wird an mehreren Beispielen die vorteilhafte Verwendung der Tafeln dargetan. Die Tabellen I und II enthalten die Logarithmen der Jacobischen elliptischen Funktionen laufend nach z bzw. q. Dabei ist $z = \cos 2x = \cos \pi u K^{-1}$. ($K$ ist das vollständige elliptische Integral 1. Gattung.) Tabellen III und IV bringen neue Funktionen, mit deren Hilfe die Jacobischen Thetafunktionen leicht zu gewinnen sind. Tabelle V gibt Hilfsmittel zur Umrechnung zwischen dem Legendreschen Modul und dem Jacobischen Parameter. *N. Hofreiter*, Wien

Acht- und neunstellige Tabellen zu den elliptischen Funktionen. Dargestellt mittels des Jacobischen Parameters q. Von *M. Schuler* und *H. Gebelein*. Mit einem englischen Text von *Lauritz S. Larsen*. Mit 11 Textabb., XXIV, 296 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. Geb. DM 58.—.

Mögen auch fünfstellige Tabellen vielen Mathematikern genügen, so sind acht- und neunstellige Tabellen für große mathematische Institute und Laboratorien doch sehr erwünscht, wenn hier Rechnungen mit großer Genauigkeit durchgeführt werden. Die Forderung nach möglichst guter Interpolation hat die Verfasser veranlaßt, die Tabellen mittels des Jacobischen Parameters q darzustellen, der in den Jacobischen Thetareihen auftritt. Zur Interpolation ist stets die erste Differenz und manchmal auch die zweite Differenz angegeben. Die Tabellen I bis IV enthalten zwei neue Funktionen $G(q^4, z)$ bzw. $H(q^3, z)$, aus denen man die Thetafunktionen rasch gewinnen kann. Die Tafeln sind nach z und q^4 bzw. q^3 geordnet. Tabelle V bringt die Jacobischen elliptischen Funktionen, dargestellt durch $lg \frac{sn\, u}{\sin x}$, $lg \frac{cn\, u}{\cos x}$, $lg\, dn$ u. Tabelle VI enthält Umrechnungsformeln zwischen dem Legendreschen Modul und dem Jacobischen Parameter. An Hand von typischen Aufgaben werden die verschiedenen Anwendungsmöglichkeiten der Tafeln gezeigt. Die Tabellen stellen wertvolle Hilfsmittel dar, um Probleme mit elliptischen Funktionen numerisch zu lösen. *N. Hofreiter*, Wien

Exposé élémentaire des principes de la géométrie euclidienne. Von *R. Brisac*. 77 S. Paris: Gauthier-Villars. 1955. ffr. 1200.

Es wird hier die Geometrie des dreidimensionalen euklidischen Raumes auf axiomatischem Wege aufgebaut. Die einzelnen Axiome werden dabei im Laufe der Entwicklung allmählich eingeführt, so daß man gut erkennt, welche Folgerungen sie nach sich ziehen. Das zugrundegelegte Axiomensystem weicht von dem bekannten System von *Hilbert* vor allem dadurch ab, daß an Stelle der Hilbertschen Axiome der Kongruenz jetzt sechs Axiome treten, durch welche die „Bewegungen" als Untergruppe aller Permutationen der Raumpunkte charakterisiert werden. Die Stetigkeitsaxiome sind nun eigentlich nichts anderes als die Forderung, daß die Gruppe der Translationen parallel zu einer Geraden eine vollständige archimedische Gruppe sein soll. In den letzten Kapiteln werden auch Koordinaten verwendet, und es wird eine Theorie der Orientierung entwickelt.

Dem ansprechenden, gut lesbaren Buch ist eine Biographie des im Jahre 1947 verstorbenen Verfassers beigelegt.

W. Nöbauer, Wien

Colloque sur les Questions de Réalité en Géométrie. Centre Belge de Recherches Mathématiques. 193 S. Liège: Thone. — Paris: Masson & Cie. 1956. ffr. 1900.

Zu der bereits recht ansehnlichen Menge der Berichte über vom Centre Belge de Recherches mathématiques veranstaltete Kolloquien kommt nun dieser neue über ein sehr interessantes und wenig bearbeitetes Gebiet. Er enthält zehn Vorträge, welche von namhaften Fachleuten anläßlich des Kolloquiums über „Fragen der Realität in der Geometrie" vom 23. bis 26. Mai 1955 gehalten wurden. Es war ein glücklicher Gedanke, ein Kolloquium gerade über diese Fragen zu veranstalten, denn es ist wohlbekannt, wie viele Probleme z. B. bei der Behandlung der reellen Teile algebraischer Gebilde noch offen sind. Im einzelnen wurden folgende Vorträge (teils in französischer, teils in italienischer Sprache)gehalten: *P. Montel*, Über endliche Geometrie und die Arbeiten von *C. Juel*. *P. Montel*, Die Anfänge der endlichen Geometrie. *A. Marchand*, Differentialeigenschaften von Kurven und Flächen beschränkter Ordnung. *O. Haupt*, Über einige Probleme der Theorie der geometrischen Ordnungen. *P. Vicensini*, Über die Anwendung einer geometrischen Methode zum Studium gewisser Mengen von konvexen Körpern. *W. Fenchel*, Über lokal konvexe Mannigfaltigkeiten projektiver Räume. *L. Brusotti*, Über einige Realitätsfragen, ihre Methoden, Resultate und Probleme. *V. Galafassi*, Klassische und neue Entwicklungen über reelle algebraische Flächen. *B. Segre*, Überdeckungen von Kugeln und Korrespondenzen topologischer Mannigfaltigkeiten. *L. Santaló*, Über das Maß der linearen Räume, die einen konvexen Körper schneiden und damit zusammenhängende Probleme.

Eine sehr reichhaltige Auswahl von interessanten Beiträgen zu einem noch wenig erforschten Teil der Geometrie. *K. Prachar*, Wien

Topological Dynamics. Von *W. H. Gottschalk* und *G. A. Hedlund*. (American Mathematical Society Colloquium Publications: Vol. XXXVI.) VII, 151 S. Providence: American Mathematical Society. 1955.

Die topologische Dynamik beschäftigt sich mit der Untersuchung gewisser Eigenschaften von topologischen Transformationsgruppen. Diese Eigenschaften traten zunächst beim Studium von Problemen der klassischen Dynamik mit Hilfe von topologischen Methoden in Erscheinung, wie sie als erster *Poincaré* durchführte. Der raschen Entwicklung der Topologie entsprechend sind auch auf

dem Gebiet der topologischen Dynamik in den letzten Jahren bemerkenswerte Fortschritte erzielt worden. Diese werden in dem vorliegendem Buch dargestellt.

Der erste Teil des Buches bringt die allgemeine Theorie und enthält zahlreiche interessante Sätze über Fastperiodizität, Transitivität, Asymptotizität und andere Eigenschaften von Transformationsgruppen, außerdem auch einen Abschnitt über Funktionenräume. Im zweiten Teil wird die Theorie auf einige lehrreiche Beispiele angewendet. Die Darstellung ist ziemlich knapp; durch die konsequente Gliederung der einzelnen Abschnitte in kurze Paragraphen wird eine gute Übersicht über die mannigfaltigen Definitionen und Sätze ermöglicht. Das Erscheinen des Buches ist sehr zu begrüßen, da es die Ergebnisse zahlreicher Arbeiten erstmalig zusammenfassend darstellt. *W. Nöbauer*, Wien

Practical Descriptive Geometry. Von *H. E. Grant.* Zweite Auflage. Mit 650 Textabb., 403 S. New York—Toronto—London: McGraw-Hill Book Company. 1956. $ 5.—.

In 17 Kapiteln wird ein reichhaltiger Stoff verarbeitet, wie ihn etwa ein Ingenieur für Maschinenbau bzw. Elektrotechnik beherrschen soll. Im Grund- und Aufrißverfahren werden die elementaren Tatsachen über Punkt, Gerade, Ebene behandelt. Es folgt die Darstellung des Kreises, der Drehflächen zweiter Ordnung, soweit es für technische Belange erforderlich ist. Eingeflochten ist für jene zukünftigen Ingenieure, die im Berg- und Straßenbau tätig sein werden, ein kurzes Kapitel über kotierte Projektionen. Mit Recht knapp ist ein Kapitel über den Schatten gehalten. Es folgt die Darstellung verschiedener krummer Flächen, es werden ebene Schnitte wie auch Durchdringungen behandelt. Den Verebnungen ist ein gebührender Raum vorbehalten. Das Buch enthält 405 theoretische und 520 praktische Aufgaben.

Dank der guten Darbietung des behandelten Stoffes, der sauber ausgeführten Figuren, der gut ausgewählten Beispiele, kann das Buch bestens empfohlen werden. *J. Laub*, Wien

The Theory of Hydrodynamic Stability. Von *C. C. Lin.* XI, 155 S. Cambridge: At the University Press. 1955. 22 s. 6 d.

Das vorliegende, *Th. v. Kármán* gewidmete Buch bringt eine zusammenfassende Darstellung unserer heutigen Kenntnisse (in allerdings etwa einseitiger Auswahl der Literatur) des hydrodynamischen Stabilitätsproblems mittels der Methode der kleinen Schwingungen. Dabei denkt man sich einer vorgegebenen Hauptströmung eine beliebig kleine Störung überlagert und untersucht, ob diese Störung im Laufe der Zeit abnimmt oder zunimmt. Von überragender Bedeutung sind dabei die Fälle, in denen die Hauptströmung eine strenge Lösung der Stockes-Navierschen Grundgleichungen darstellt und die in einem einleitenden ersten Kapitel zusammengestellt werden. Es sind das die Fälle einer laminaren Strömung mit linearen und parabolischen Geschwindigkeitsprofil zwischen parallelen Wänden, die Couettesche Strömung zwischen rotierenden Zylindern und die Poiseuillesche Strömung mit parabolischem Geschwindigkeitsprofil in einem zylindrischen Kreisrohr. Während die Aufstellung der gewöhnlichen Differentialgleichungen vierter Ordnung, welche die entsprechenden Stabilitätsprobleme beherrschen, leicht gelingt, ist es umso schwerer, die Lösungen der Differentialgleichungen samt ihren asymptotischen Entwicklungen anzugeben und die sich ergebenden Eigenwertgleichungen in allen Einzelheiten zu lösen. Im einfachsten Falle, dem der Couetteschen Strömung zwischen parallelen Wänden, stimmen alle Autoren darin überein, daß die Hauptströmung stabil

sei. Im Falle der eigentlichen Couetteschen Strömung zwischen rotierenden Zylindern wurde von *G. I. Taylor* 1923 eine Instabilität theoretisch und experimentell entdeckt, die aber wesentlich mit dem Auftreten von Zentrifugalkräften verknüpft ist und einen Übergang zu Strömungsformen ergab, die nichts mit Turbulenz zu tun haben (Kap. 2). Eine Instabilität der parabolischen Geschwindigkeitsverteilung zwischen parallelen Wänden (Kap. 3) wurde 1924 von *Heisenberg* behauptet; doch konnten seine Rechnungen infolge der ungenügenden mathematischen Grundlagen nicht als beweisend angesehen werden. Seither haben sich zahlreiche Autoren, darunter der Autor des vorliegenden Buches, um die Verbesserung dieser mathematischen Grundlagen bemüht. Ein eigenes Kap. (das letzte des Buches) referiert über den augenblicklichen Stand dieses Problems, ohne jedoch den Eindruck einer Lösung des Problems vermitteln zu können. Die Stabilitätsgleichung für die Poiseuillesche Strömung in Rohren, die von *Sexl* (1927) herrührt, wird zwar in dem einleitenden ersten Kap. des Buches kurz dargestellt, ohne daß jedoch auf die für diese Strömung bereits erzielten Ergebnisse näher eingegangen wird. Und gerade diese Strömungsform ist die experimentell allein entscheidende! Nachdem in einem 4. Kap. einige allgemeine Theoreme zur Stabilitätsfrage erörtert wurden, werden in einem 5. und 6. Kap. die von der Göttinger-Schule (*Tollmien, Schlichting*) erzielten Ergebnisse bezüglich der Instabilität von laminaren Grenzschichten, deren Hauptströmungen natürlich keine strengen Lösungen der Stokes-Navierschen Gleichungen darstellen, und deren experimentelle Bestätigung (1947) durch *Schubauer* und *Skramstad* behandelt. Anwendungen der Stabilitätstheorie auf Probleme der Astro- und Geophysik finden sich in einem 7. Kap.

Alles in Allem eine vorzügliche Monographie, die für jeden auf diesem Gebiete arbeitenden Forscher unentbehrlich sein dürfte. *Th. Sexl*, Wien

Constantes fondamentals des Théories physiques. Von *Sh. Yiftah.* Mit 2 Textabb., XII, 124 S. Paris: Gauthiers-Villars. 1956. ffr. 2300.

Vorliegende Veröffentlichung enthält mit einigen Ergänzungen die Dissertation des Verf., der sein Doktorat an der Pariser Universität unter der Leitung von *L. de Broglie* erworben hat. Das Thema der Doktorarbeit war die Überprüfung der Natur und der verschiedenen Relationen der fundamentalen Konstanten, welche in der modernen Physik auftreten. Dabei werden nicht nur die Konstanten der Quantenphysik, sondern auch die der *Einstein*schen Kosmologie und des expandierenden Universums herangezogen. Das besondere Verdienst der Arbeit liegt nach *de Broglie* in der außerordentlichen Klarheit der Darstellung, in den vielen originalen Bemerkungen und in dem sehr gelungenem Versuch, die in zahlreichen Zeitschriften verstreuten Einzelausführungen zu dem Thema auf einen gemeinsamen Nenner zu bringen.

In einem ersten Kapitel werden insbesondere die verschiedenen Versuche erläutert, in die moderne Physik eine sogenannte „kleinste Länge" einzuführen. Dabei werden die Ansätze zu der neuen „nicht lokalisierbaren" Feldtheorie von *Yukawa* und der Versuch *de Broglies* einer kausalen Erklärung in der Quantentheorie diskutiert. Ein zweites Kapitel enthält eine Diskussion derjenigen Konstanten, welche in die allgemeine Relativitätstheorie und in ihre kürzlich durch *Einstein* erfolgte Verallgemeinerung, die einheitliche Feldtheorie, eingehen. In einem dritten Kapitel werden schließlich 1. das Verhältnis der Nukleonen- und Elektronenmasse, 2. die Feinstrukturkonstante und 3. das Verhältnis der elektrischen und der Gravitationskräfte als Fundamentalkonstante deklariert. Die drei restlichen Kapitel IV—VI beinhalten hochinteressante

Einzelausführungen betreffend die drei obigen Fundamentalkonstanten. Das, was die vorliegende Arbeit zu einer besonders interessanten und lesenswerten macht, ist die Tatsache, daß sie weniger fertige Problemlösungen als vielmehr zahlreiche Fragestellungen enthält, die des Nachdenkens wohl wert erscheinen dürften. *Th. Sexl*, Wien

Relativity. The Special Theory. Von *J. L. Synge.* (Series in Physics.) XIV, 450 S. Amsterdam: North-Holland Publishing Company. 1956. fl. 38.—.

Der Verfasser läßt seinem vor kurzem erschienen Werk „Geometrical Mechanics and de Broglie Waves"(vgl. diese Zeitschrift Bd. **59** (1955), S. 251) jetzt ein Buch über die spezielle Relativitätstheorie folgen. Es weist die gleichen Eigenschaften auf: Klare und sachgemäße Darstellung der mathematischen Grundlagen und genaue und saubere Herausarbeitung der physikalischen Annahmen. Ich möchte hier nur auf die Kapitel über die Raum-Zeitdiagramme und die Lorentz-Transformation hinweisen (welche auch eine Einführung in die Theorie der Spinoren enthalten). Die letzten vier Kapitel bringen Entwicklungen, welche noch im Fluß sind und deren physikalische Bedeutung noch unklar ist. So entwickelt der Verfasser im 7. Kapitel eine Mechanik diskreter Systeme, insbesondere des Zweikörperproblems, welches ja in der Relativitätstheorie von außerordentlicher Schwierigkeit ist. Im nächsten Kapitel gelingt es dann, durch statistische Methoden zur Dynamik kontinuierlicher Medien aufzusteigen, also die sonst gewöhnlich phänomenologische Theorie statistisch zu begründen. Die letzten zwei Kapitel beschäftigen sich mit der Theorie des elektromagnetischen Feldes.

Das Buch macht uns mit Untersuchungen bekannt, die in Originalarbeiten nicht leicht zugänglich sind und sein Studium kann wärmstens empfohlen werden. Das Buch ist ganz ausgezeichnet ausgestattet. *E. Hlawka*, Wien

La Théorie du Champ Unifié d'Einstein et quelques-uns de ses Développements. Von *M. A. Tonnelat.* Vorwort von A. Lichnerowicz. X, 156 S. Paris: Gauthier-Villars. 1955. ffr. 2500.

Bestrebungen, Gravitation und elektromagnetisches Feld unter einen Hut zu bringen, sind alt und setzten sofort nach Aufstellung der allgemeinen Relativitätstheorie ein. Die eine Richtung legt Räume von mehr als 4 Dimensionen zugrunde (*Kaluza, Einstein-Mayer, Jordan, de Thiry*), die andere Richtung bleibt beim vierdimensionalen Raum, versieht ihn aber mit der Struktur einer allgemeinen Übertragung (läßt also die Annahme einer Riemannschen Metrik fallen). Die erste solche Theorie stammt von *H. Weyl. Einstein* und *Schrödinger* haben nun in den letzten 10 Jahren solche Theorien entwickelt. Dieses Buch stellt sich die Aufgabe, eine Einführung in die letztgenannten Theorien zu geben. Diese Aufgabe wurde von der Verfasserin in meisterhafter Weise gelöst. Es ist zu beachten, daß die Dinge noch im Fluß sind und die Literatur keineswegs leicht zu verarbeiten ist. Sehr zu begrüßen ist das Literaturverzeichnis, welches wohl vollständig ist.

Jeder, der die letzte Feldtheorie von *Einstein* und *Schrödinger* studieren will, muß zu diesem Buch greifen. *E. Hlawka*, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien, IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges. m. b. H., Innsbruck, Innrain 27—29

Berechnung magnetischer Felder.

Von Prof. Dr.-Ing. Dipl.-Ing. **Franz Ollendorff**, Haifa. Mit 287 Textabbildungen. X, 432 Seiten. Gr.-8°. 1952. (Technische Elektrodynamik, Band I.)

Ganzleinen S 396.—, DM 66.—, sfr. 67.50, Dollar 15.70

„... Die Auswahl der durchgerechneten Aufgaben beweist aufs neue, daß eine der Fähigkeiten des Theoretikers darin bestehen muß, Probleme zu sehen, eine andere, sie in der richtigen Weise zu idealisieren. Mit diesen beiden Gaben vereinigt der Verfasser die weitere hohe Kunst, die notwendigen mathematischen Hilfsmittel in meisterhafter Weise einzusetzen und zu handhaben ..."

„ETZ Elektrotechnische Zeitschrift"

Innere Elektronik.

Von Prof. Dr.-Ing. Dipl.-Ing. **Franz Ollendorff**, Haifa. (Technische Elektrodynamik, Band II.)

Erster Teil: **Elektronik des Einzelelektrons.** Mit 313 Textabbildungen. XII, 643 Seiten. Gr.-8°. 1955.

Ganzleinen S 582.—, DM 97.—, sfr. 99.30, Dollar 23.10

„... Der durch frühere hervorragende Bücher der gleichen Materie hinreichend bekannte Autor beherrscht dieses nicht einfache Gebiet in vollendeter Weise. Dadurch ist ihm eine überaus klare Darstellung der mathematischen Analysen gelungen, die er durchwegs so vollständig durchführt, daß auch der mathematisch nicht ungewöhnlich vorgebildete Leser bei entsprechend sorgfältigem Studium jedem einzelnen Schritt folgen kann. Darin liegt neben dem praktischen Wert der unmittelbaren Behandlung technisch wichtiger Probleme ein hoher didaktischer Wert des Werkes für den Studierenden wie für den in der praktischen Entwicklung stehenden Physiker." *„Archiv der elektrischen Übertragung"*

Zweiter Teil: **Elektronik freier Raumladungen.** *In Vorbereitung*

Dritter Teil: **Kinetische Elektronentheorie.** Rauschen (Noise) und Quantenmechanik der Elektronik. *In Vorbereitung*

Vierter Teil: **Kristallelektronik.** *In Vorbereitung*

Ionik,

Von Prof. Dr.-Ing. Dipl.-Ing. **Franz Ollendorff**, Haifa. (Technische Elektrodynamik, Band III.)

Die Welt der Vektoren.

Einführung in Theorie und Anwendung der Vektoren, Tensoren und Operatoren. Von Prof. Dr.-Ing. Dipl.-Ing. **Franz Ollendorff**, Haifa. Mit 68 Textabbildungen. VIII, 470 Seiten. Gr.-8°. 1950.

S 228.—, DM 37.50, sfr. 39.—, Dollar 9.—
Ganzleinen S 240.—, DM 40.—, sfr. 42.—, Dollar 9.50

„... Es ist die Frucht der Erkenntnis, daß für das Studium der exakten Naturwissenschaften, insbesondere aber der theoretischen Physik, die bisher übliche Basis der Vektorlehre zu schmal geworden ist. Inhaltsmäßig nimmt das Werk eine Mittelstellung ein zwischen einem Lehrbuch der reinen Mathematik und einem Lehrbuch der theoretischen Physik ..."

„ZAMP, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik"

Soeben erschien:

Einführung in die mathematische Statistik

Von

Dr. Leopold Schmetterer

Professor an der Universität Wien

Mit 13 Textabbildungen. XXIII, 405 Seiten. Gr.-8°. 1956

Ganzleinen S 294.—, DM 49.—, sfr. 50.10, Dollar 11.65

Ein einführendes modernes Lehrbuch der mathematischen Statistik, das sich in erster Linie an den Mathematiker und an den mathematisch interessierten Statistiker wendet, hat in der deutschsprachigen Fachliteratur bisher gefehlt. Diesem fühlbaren Mangel entsprechend hat der Verfasser, gestützt auf seine Vorlesungen an der Wiener Universität, das vorliegende Werk geschrieben, in dem er ausführlich auf die Ergebnisse der großartigen Entwicklungen der letzten 25 Jahre eingeht, die freilich zum großen Teil schon als klassisch bezeichnet werden können und mit den Namen *Fisher*, *Pearson* und insbesondere *Neyman* verknüpft sind. Darüber hinaus enthält das Buch auch neuere Ergebnisse, die sich bisher wohl kaum in einer zusammenfassenden Darstellung finden. Dem Studierenden soll mit diesem Buch die Möglichkeit geboten werden, sich mit den Grundlagen vertraut zu machen und jene Voraussetzungen zu erwerben, die für ein tieferes Eindringen in die Materie erforderlich sind. Eine Gegenüberstellung der deutschen Ausdrücke und der analogen Termini der englischen Literatur im Anhang bildet einen nützlichen Behelf für das Studium der fremdsprachigen Literatur.

Lehrbuch der Funktionentheorie

Von

Dr. phil. Hans Hornich

o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Graz

Mit 34 Textabbildungen. VII, 216 Seiten. Gr.-8°. 1950

Steif geheftet S 117.—, DM 19.50, sfr. 19.80, Dollar 4.70
Ganzleinen S 130.—, DM 21.60, sfr. 22.—, Dollar 5.20

„Aufgeteilt in 10 Kapitel mit den Überschriften: Komplexe Zahlen, Differenzierbare Funktionen, Potenzreihen, Integrale im Komplexen, Satz von Cauchy, Isolierte Singularitäten, Reihen von Funktionen, Analytische Fortsetzung, Untersuchung spezieller Funktionen, Algebraische Funktionen und ihre Integrale, enthält das Buch etwa den Stoff, der in einer üblichen Vorlesung über Funktionentheorie dargeboten wird. Am Schluß jedes Kapitels sind einige einschlägige Übungsbeispiele zusammengestellt. — Als besondere Gegenstände seien hervorgehoben die Eulerschen Integrale und die im letzten Kapitel gegebene kurze Darstellung der algebraischen Funktionen. Klar und faßlich geschrieben und auf das Wesentliche beschränkt, ist das Buch für jeden, der sich irgendwie mit diesem Gebiet der Mathematik zu befassen hat, eine wertvolle Hilfe."

„Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete"